

DER WÄRMEÜBERGANG IN GLATTEN ROHREN, ZWISCHEN PARALLELEN PLATTEN, IN RINGSPALTEN UND LÄNGS ROHRBÜNDELN BEI EXPONENTIELLER WÄRMEFLUSSVERTEILUNG IN ERZWUNGENER LAMINARER ODER TURBULENTER STRÖMUNG*

H. GRÄBER

EURATOM, z.Zt. CEN-Saclay, Service SEMTR

(Received 23 September 1968)

Zusammenfassung—Durch Einführen eines zusätzlichen Parameters F_0 werden die bisher bekannten Verfahren zur Berechnung des Wärmeübergangs auf diejenigen Wärmeflussverteilungen erweitert, die, stromab des thermischen und hydraulischen Einlaufs, einen vom Ort unabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten ergeben: Diese Bedingung wird erfüllt bei laminarer und turbulenter Strömung mit linearem Druckabfall für die exponentielle Wärmeflussverteilung $q_w = \exp(mx)$, wie sie in Wärmeaustauschern vorliegt. Der Einfluss des Exponenten m auf den Wärmeübergang wird dabei eindeutig beschrieben durch den Differentialquotienten $d\vartheta_w/d\vartheta_0 = F_0$, gebildet aus dem Temperaturgradienten $d\vartheta_w/dx$ längs der wärmeaustauschenden Wand und $d\vartheta_0/dx$ des strömenden Mediums an der Stelle mit verschwindendem wandnormalen Temperaturgradienten. Für den Ringspalt werden Gleichungen zur expliziten Berechnung des Temperaturfeldes und der Nusselt-Zahl bei laminarer Strömung und konstantem Wärmefluss für ein- oder beidseitigen Wärmeaustausch angegeben. Für den Fall turbulenter Strömung im Ringspalt und längs Rohrbündeln ermöglicht eine Anpassung der von H. Reichardt für das Rohr ermittelten Verteilung der Impulsaustauschgrösse die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes und des Reibungskoeffizienten und damit die Lösung der Wärmeübergangsgleichungen. Die Ergebnisse der numerischen Auswertung werden für einen breiten Bereich der verschiedenen Einflussgrössen in Tabellen und Diagrammen zusammengestellt und mit experimentellen Ergebnissen verglichen: Geschwindigkeits-, Temperatur- und wandnormaler Wärmestromdichteverlauf, Nusselt-Zahl und Mischungstemperatur. Zur Abschätzung der thermischen Einlaufänge wird ein einfaches Berechnungsverfahren angegeben.

BEZEICHNUNGEN

a , Temperaturleitfähigkeit, $\lambda/(\rho c_p)$;
 c_p , Spezifische Wärme;
 d , Durchmesser;
 d_h , Hydraulischer Durchmesser, $4S/U$;
 F_0 , Parameter der Wärmestromdichteverteilung;
 F_m , Hilfsgrösse zur Berechnung von F_0 ;
 \dot{G} , Massenstrom;
 h , Wandabstand bei parallelen Platten;
 k , Wärmedurchgangszahl;

l , Länge der wärmetauschenden Wand stromab des hydrodynamischen und thermischen Einlaufs;
 m , Exponent der Wärmeflussverteilung;
 Nu , Nusselt-Zahl, bezogen auf die Temperaturdifferenz $(\vartheta_w - \vartheta_m)$, $\alpha d_h/\lambda$;
 Nu_0 , Nusselt-Zahl bezogen auf die Temperaturdifferenz $(\vartheta_w - \vartheta_0)$, $\alpha_0 d_h/\lambda$;
 Nu_q , Nusselt-Zahl bei konstantem Wärmefluss;
 p , Abstand der Rohrmitten beim Rohrbündel;
 Pe , Péclet-Zahl, $RePr = u_m d_h/a$;
 Pr , Prandtl-Zahl, $\mu c_p/\lambda$;

* Die vorliegende Arbeit ist ein Auszug aus der französischen Fassung, die von der Faculté des Sciences de l'Université de Paris zur Erlangung des Doctorat d'Etat ès Sciences genehmigt wurde.

Pr^+ ,	Verallgemeinerte Prandtl-Zahl, $Pr\epsilon_h/\epsilon_m$;	η_c ,	η an der Stelle $r = r_c$;
q ,	Wärmestromdichte;	η_s ,	η am Schnittpunkt des ϵ_m -Wand- und Mittengesetzes;
q_{wi} ,	Wärmestromdichte an der Wand i ;	ϑ ,	Temperatur;
r ,	Radius, bei ebenen Begrenzungs- wänden Abstand von der Stelle $\partial\vartheta/\partial y = 0$;	ϑ^+ ,	Schubspannungstemperatur, $q_w/(\rho c_p u^+)$;
r_c ,	r an der Stelle $du/dy = 0$;	ϑ_m ,	Mischungstemperatur;
r_w ,	r an der wärmeaustauschenden Wand, negativ für die Fälle $r_c > r_w $;	ϑ_w ,	Wandtemperatur;
Re ,	Reynolds-Zahl, $u_m d_h/\nu$;	ϑ_0 ,	Temperatur an der Stelle $\partial\vartheta/\partial y = 0$;
Re_T ,	Äquivalente Rohr-Reynolds-Zahl bei nichtkreisförmigem Strömungsquer- schnitt;	θ ,	Dimensionslose Temperatur, $(\vartheta - \vartheta_w)/(\vartheta_0 - \vartheta_w)$;
S ,	Strömungsquerschnitt;	θ_m ,	Dimensionslose Mischungstempere- tur, $(\vartheta_m - \vartheta_w)/(\vartheta_0 - \vartheta_w)$;
St ,	Stanton-Zahl, $\alpha/(\rho u_m c_p) = Nu/(RePr)$;	θ_x ,	Dimensionslose Temperatur, $(\vartheta - \vartheta_{wa})/(\vartheta_{0a} - \vartheta_{wa})$;
u ,	Strömungsgeschwindigkeit in x - Richtung;	λ ,	Wärmeleitfähigkeit;
u_c ,	Maximale Strömungsgeschwindig- keit;	μ ,	Dynamische Viskosität;
u_m ,	Mittlere Strömungsgeschwindigkeit;	ν ,	Kinematische Viskosität;
u_z ,	Zusatzgeschwindigkeit gegenüber der logarithmischen Geschwindigkeits- verteilung;	ρ ,	Spezifische Masse;
u^+ ,	Schubspannungsgeschwindigkeit, $\sqrt{(\tau_w/\rho)}$;	τ ,	Schubspannung;
U ,	Umfang (benetzt);	τ_w ,	Wandschubspannung;
U^+ ,	Verhältnis aus dem Umfang U der benetzten Wand und U_w der wärme- austauschenden Wand, U/U_w ;	φ ,	Dimensionslose Geschwindigkeit in x -Richtung.
x ,	Koordinate in Strömungsrichtung;	Indices	
x_e ,	Thermische Einlaufänge;	a ,	Stelle $x = x_a = 0$;
y ,	Wandabstand;	A ,	Ringspalt;
y^+ ,	Dimensionslose wandnormale Ko- ordinate, $r/ r_w $;	B ,	Rohrbündel;
z^+ ,	Dimensionsloser "Mitten"-Abstand von der Stelle $du/dy = 0$.	c ,	Stelle $du/dy = 0$;
Griechische Symbole		m ,	Mittelwert;
α ,	Wärmeübergangszahl, $q_w/(\vartheta_w - \vartheta_m)$;		Molekularer Anteil;
Δp ,	Druckverlust;	t ,	Turbulenter Anteil;
ϵ_h ,	Austauschgröße für Wärme;	PP,	Parallele Platten;
ϵ_m ,	dto. für Impuls;	PS,	Parallele Platten, symmetrischer Wärmeaustausch;
ζ ,	Reibungskoeffizient;	PAS,	dto., asymmetrischer Wärmeaus- tausch;
η ,	Dimensionsloser Wandabstand bei turbulenter Strömung, y/ν ;	T ,	Rohr;
		w ,	Wand;
		0 ,	Stelle $\partial\vartheta/\partial y = 0$;
		1, 2,	Strömungsquerschnitt, 1 bzw. 2 bei Wärmeaustauschern;
			Wärmeaustausch an der Wand 1 ($r = r_1$) bzw. 2 ($r = r_2$) beim Ringspalt;
		12,	Gesamter Ringspaltquerschnitt.

1. EINLEITUNG

DIE UNTERSUCHUNGEN in den bisher erschienenen Veröffentlichungen über den Einfluss der Wärmeflussverteilung auf den Wärmeaustauschkoeffizienten gehen entweder von speziellen Erfordernissen, wie etwa der in Kernreaktoren vorhandenen näherungsweise sinusförmigen Flussverteilung oder von beliebig vorgegebenem Verlauf der Temperatur bzw. Wärmestromdichte aus [1–5]. In beiden Fällen muss dabei zur Berechnung des Wärmeaustausches auf die Verfahren der schrittweisen Lösung und Superposition zurückgegriffen werden. Daneben gibt es jedoch zwei wichtige Gruppen von thermischen Randbedingungen, die eine geschlossene Lösung zulassen: die in Wärmeaustauschern vorliegende exponentielle Wärmestromdichteverteilung sowie die einem Potenzgesetz gehorchende Wärmeflussverteilung der laminar angeströmten ebenen Platte. Auf den erstgenannten Fall haben bereits Hall und Price [1] hingewiesen*, für den Fall der laminaren Plattenströmung wurden von Sparrow und Lin [4] exakte Lösungen angegeben.

Mit Hilfe einer Ähnlichkeitsbetrachtung wird in der vorliegenden Arbeit für den Fall der Kanalströmungen gezeigt, dass nur die Wärmestromdichteverteilung $q_w \sim \exp(mx)$ die Forderung einer vom Ort in Strömungsrichtung unabhängigen Wärmeübergangszahl erfüllt. Der Fall der laminaren Strömung längs einer ebenen Platte bei der Wärmestromdichteverteilung $q_w \sim x^m$ wird in einer separaten Arbeit behandelt [39].

Für die Fälle turbulenter Kanalströmung wird das Analogieverfahren des Impuls- und Wärmeaustausches angewandt, wobei das Verhältnis der Austauschgrößen für Wärme ε_h und Impuls ε_m als über den Querschnitt konstant, jedoch nicht notwendigerweise gleich eins gesetzt wird. Diese Vereinfachung,

zusammen mit der insbesondere bei nicht-kreisförmigen Querschnitten noch mit Unsicherheit behafteten Kenntnis über die Impulsaustauschgrösse ε_m , beeinträchtigt die Genauigkeit der Absolutwerte der zu berechnenden Grössen, dagegen wird ihr Einfluss beim Vergleich verschiedener Strömungsquerschnitte und Wärmeflussverteilungen—das eigentliche Ziel der vorliegenden Arbeit—auf ein befriedigendes Mass zurückgehen.

Für den Verlauf der Impulsaustauschgrösse und der Geschwindigkeit in Rohren und zwischen parallelen Platten werden die von Reichardt [6, 7] angegebenen Formeln übernommen, die auf Grund sorgfältiger experimenteller Untersuchungen und theoretischer Betrachtungen, besonders in grosser Wandnähe, aufgestellt wurden. Diese Formeln werden für den Ringspalt und das Rohrbündel erweitert. Im Gegensatz zu Rotfus *et al.* [8] und Bailey [9] wird dabei von einem Ansatz über die Impulsaustauschgrösse ausgegangen. Dieses Verfahren gestattet, den Radius verschwindender Schubspannung in Abhängigkeit vom Radienverhältnis und von der Reynolds-Zahl zu berechnen, während z.B. in der erstgenannten Arbeit dieser Radius demjenigen bei laminarer Strömung gleichgesetzt wurde, was experimentellen Ergebnissen widerspricht [10]. Nach Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilungen lassen sich die Widerstandskoeffizienten für den Ringspalt und für das Rohrbündel berechnen.

Beim Rohrbündel wird die bereits von Lyon eingeführte Vereinfachung angewandt, die das Hexagon verschwindender Schubspannung durch einen Kreis gleichen Flächeninhalts ersetzt. Dadurch erreicht man, dass die Strömung und der Wärmeübergang für das Rohrbündel aus den für die innere Hälfte eines (sog. zugeordneten) Ringspalts ermittelten Beziehungen berechnet werden können.

2. HERLEITUNG ALLGEMEINER GLEICHUNGEN

2.1 Vereinfachungen und Annahmen

Die Berechnungen werden durchgeführt unter Vernachlässigung folgender eventuell auf-

* Der Nachweis, dass sich ortsunabhängige Nusselt-Zahlen ausschliesslich für $q \sim \exp(mx)$ ergeben, wurde inzwischen auch von Hasegawa und Fujita [40] hergeleitet.

tretender Einflüsse: Dissipation, Kompressibilität, Strahlung, Wärmeleitung in Strömungsrichtung, Temperaturabhängigkeit physikalischer Stoffwerte, Überlagerung freier Konvektion, Abhängigkeit des Verhältnisses der Austauschgrößen ϵ_h und ϵ_m vom Wandabstand, Exzentrizität beim Ringspalt und Rohrbündel, Ungleichförmigkeit der Wärmestromdichteverteilung über den Umfang, hydraulischer und thermischer Einlauf.

Für die Verteilung der Impulsaustauschgrösse ϵ_m werden folgende Annahmen getroffen:

Das Wandgesetz in der Form [6]:

$$\epsilon_m/v = \kappa \eta_m [\eta/\eta_m - \operatorname{tgh}(\eta/\eta_m) - (1/3) \operatorname{tgh}^3(\eta/\eta_m)] \quad (1)$$

mit $\eta_m = 7,15$ und $\kappa = 0,4$ gilt für alle betrachteten Strömungsquerschnitte im wandnahen Bereich.

Das Mittengesetz in der Form [7]:

$$\epsilon_m/(v\eta_c) = (\kappa/3)(0,5 + z^{+2})(1 - z^{+2}) \quad (2)$$

gilt bei Rohren, parallelen Platten und im Abschnitt $r_c \leq r \leq r_2$ bei Ringspalten bis zum Schnittpunkt mit dem Wandgesetz Gleichung (1), dagegen wird es im Abschnitt $r_c \geq r \geq r_1$ bei Ringspalten und Rohrbündeln zur Anpassung an der Stelle $r = r_c$ mit einem Faktor multipliziert (s. Abschnitt 3.4.2.1).

2.2 Formeln für den Wärmeübergang

Die in den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 hergeleiteten Beziehungen haben die von Reichardt [6] für das Rohr und für die parallelen Platten bei der thermischen Randbedingung $\vartheta_w = \text{konst.}$ gegebene Darstellung zur Grundlage. Durch Einführen des dimensionslosen Wandabstandes y^+ werden sie auf beliebige Strömungsquerschnitte erweitert.

2.2.1 Die Temperaturverteilung

Trennt man bei der Wärmeübertragung die durch Molekularbewegung einerseits und durch turbulenten Austausch andererseits betroffenen Anteile, so erhält man:

$$q = q_m + q_t = q_m(1 + q_t/q_m) \quad (3)$$

Dabei ist:

$$q_m = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad (4)$$

$$q_t = -\lambda_t \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -\rho c_p \epsilon_h \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad (5)$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) ergibt sich:

$$\frac{q_t}{q_m} = \frac{\rho c_p \epsilon_h}{\lambda} = \frac{\mu c_p \rho}{\lambda} \frac{\epsilon_h}{\epsilon_m} = Pr \frac{\epsilon_h}{\epsilon_m} \frac{\epsilon_m}{v} \quad (6)$$

Mit der von Reichardt eingeführten "verallgemeinerten" Prandtl-Zahl:

$$Pr^+ = Pr \frac{\epsilon_h}{\epsilon_m} \quad (7)$$

und der Wärmestromdichte an der Wand $q_w = -\lambda(\partial \vartheta / \partial y)_w$ erhält man die Beziehung:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_w \frac{q/q_w}{1 + Pr^+ (\epsilon_m/v)} \quad (8)$$

Es erweist sich nun als zweckmässig, die folgenden dimensionslosen Koordinaten einzuführen:

$$\theta = \frac{\vartheta - \vartheta_w}{\vartheta_0 - \vartheta_w} \quad (9)$$

und

$$y^+ = \frac{r}{|r_w|} \quad (10)$$

Hierbei bedeuten r den Radius bei kreiszylindrischen bzw. den Abstand von der Stelle $\partial \vartheta / \partial y = 0$ bei ebenen Begrenzungswänden und $|r_w|$ den Betrag von r an der wärmetauschenden Wand (Abb. 1). Die vorzeichenbehaftete Grösse r_w nimmt für die einzelnen Strömungsquerschnitte folgende Werte an:

- $d/2$ —Rohr
- $h/2$ —Parallele Platten, symmetrischer Wärmeübergang
- h —Parallele Platten, asymmetrischer Wärmeübergang

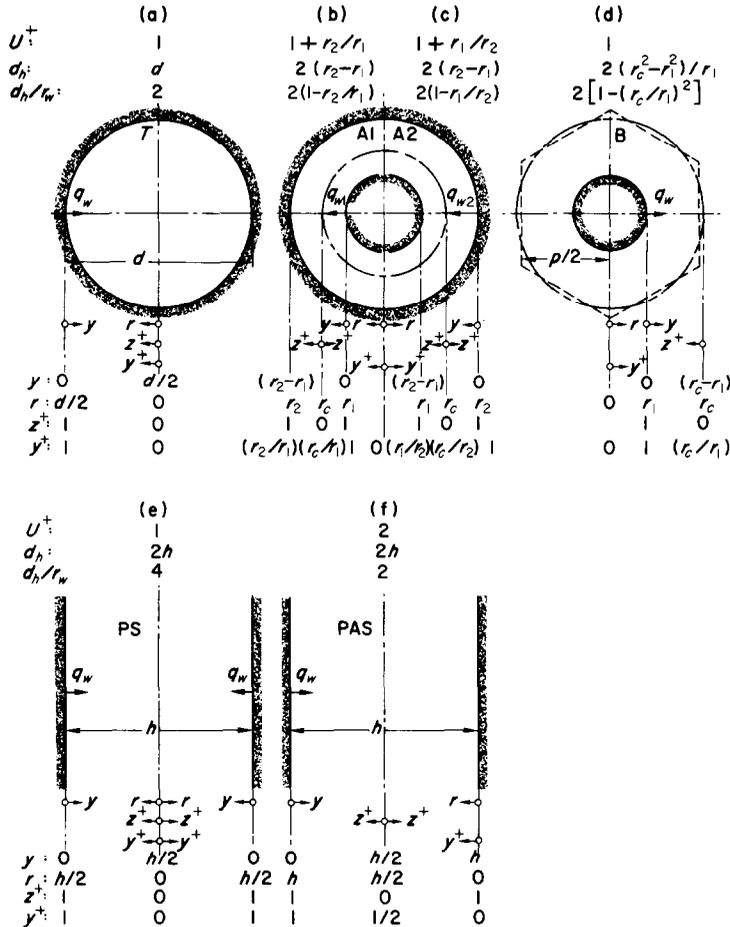


ABB. 1. Zusammenstellung der geometrischen Daten und der Bezeichnungen für die verschiedenen Strömungsquerschnitte. (a) Rohr (T) (b) Ringspalt, Wärmeaustausch am inneren Zylinder (A1) (c) Ringspalt, Wärmeaustausch am äusseren Zylinder (A2) (d) Rohrbündel (B) (e) Parallele Platten, symmetrischer Wärmeaustausch (PS) (f) Parallele Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch (PAS).

- r_1 — Ringspalt, Wärmeübergang am inneren Zylinder
- r_2 — Ringspalt, Wärmeübergang am äusseren Zylinder
- r_1 — Rohrbündel.

Die Integration der Gleichung (8), beginnend an der wärmetauschenden Wand ($y^+ = y_w^+ = 1$; $\theta = 0$) ergibt unter Beachtung von $\theta(y^+ = y_0^+) = 1$:

$$\theta = 1 - \frac{\int_1^{y^+} \frac{q/q_w}{1 + Pr^+(\epsilon_m/v)} dy^+}{\int_1^{y_0^+} \frac{q/q_w}{1 + Pr^+(\epsilon_m/v)} dy^+} \quad (11)$$

Die Mischungstemperatur

$$\theta_m = \frac{\vartheta_m - \vartheta_w}{\vartheta_0 - \vartheta_w} \quad (12)$$

lässt sich mit Hilfe der Geschwindigkeitsverteilung $\varphi = u/u_c$ und der mittleren Geschwindigkeit $\varphi_m = u_m/u_c$ berechnen zu

$$\theta_m = \frac{2}{\varphi_m(1 - y_0^{+2})} \int_{y_0^+}^1 \varphi \theta y^+ dy^+ \quad (13)$$

bei kreiszylindrischen Wänden und zu

$$\theta_m = \frac{1}{\varphi_m} \int_0^1 \varphi \theta dy^+ \quad (14)$$

bei ebenen Wänden.

2.2.2 Die Wärmeübergangskennzahl Nu

Für die Nusselt-Zahl

$$Nu = \frac{\alpha d_h}{\lambda} \quad (15)$$

erhält man unter Beachtung von $y = r_w \pm r$ und

$$\alpha = \frac{q_w}{\vartheta_w - \vartheta_m} \quad (16)$$

die Gleichung

$$Nu = - \frac{d_h/r_w \left(\frac{\partial \theta}{\partial y^+} \right)_w}{\theta_m} = \frac{d_h/r_w}{\theta_m \int_{y_0^+}^1 \frac{q/q_w}{1 + Pr^+ (\varepsilon_m/\nu)} dy^+} \quad (17)$$

Bei laminarer Strömung entfällt in den vorausgegangenen Gleichungen der Ausdruck $Pr^+ (\varepsilon_m/\nu)$.

2.2.3 Die wandnormale Wärmeflussdichteverteilung

Aus einer Betrachtung über die Wärmebilanz folgt, dass der durch eine wandparallele Schicht der Länge dx hindurchtretende thermische Fluss gleich der Enthalpieänderung des Massstromes zwischen dieser Schicht und der Stelle $\partial \vartheta / \partial y = 0$ ist.

Die Bestimmungsgleichung für q lautet bei kreiszylindrischen Wänden:

$$2\pi y^+ q dx = \rho c_p \int_{y^+}^{y_0^+} 2\pi y^+ u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx dy^+.$$

Für die Wärmeflussdichte q_w an der Wand ist y^+ durch $y_w^+ = 1$ zu ersetzen, was nach Einführung von $\varphi = u/u_c$ folgende Gleichung für die dimensionsbefreite wandnormale Wärmestromdichteverteilung liefert:

$$\frac{q}{q_w} = \frac{\int_{y_0^+}^{y^+} \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial x} y^+ dy^+}{y^+ \int_0^1 \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial x} y^+ dy^+} \quad (18)$$

Der axiale Temperaturgradient $\partial \vartheta / \partial x$ wird im folgenden Abschnitt berechnet, die endgültigen Gleichungen zur Berechnung von q/q_w sind daran anschliessend aufgeführt (Gleichung 39 bzw. 40).

2.2.4 Der Parameter der Wärmeflussverteilung

Aus Gleichung (17) ist zu ersehen, dass die Kennzahl der Wärmeübertragung Nu für einen speziellen Fall der Konfiguration, Re - und Pr^+ -Zahl (bei laminarer Strömung entfällt der Einfluss von Pr und Re) nur dann in Strömungsrichtung konstant ist, wenn die dimensionslose Temperaturverteilung $\theta(y^+)$ x -unabhängig ist, oder mit anderen Worten, wenn die Temperaturprofile ϑ in Strömungsrichtung ähnlich sind. In der folgenden Betrachtung wird gezeigt, unter welchen Voraussetzungen diese Bedingung erfüllt ist. Zur Veranschaulichung werden dabei die Vorgänge längs eines Wärmeaustauschers herangezogen.

In den Abb. 2a-f sind die Temperaturen ϑ_w an der Wand sowie ϑ_{01} und ϑ_{02} der beiden wärmeaustauschenden Medien für verschiedene Verhältnisse der Wasserwerte und der Strömungsrichtung über der Lauflänge x/l aufgetragen. Die zugehörigen Kurven $(\theta_x)_1 =$

$f(x/1, y^+)$ zeigen für den Strömungsquerschnitt 1 des Wärmeaustauschers eine ortsabhängige, dimensionslose Temperaturverteilung, die wie folgt definiert ist:

$$\theta_x \left(\frac{x}{1}, y^+ \right) = \frac{\vartheta - \vartheta_{wa}}{\vartheta_{0a} - \vartheta_{wa}} \quad (19)$$

(Der zusätzliche Index a kennzeichnet die Stelle $x = x_a = 0$.) Bei Kongruenz der Temperaturprofile $\theta(y^+) = (\vartheta - \vartheta_w)/(\vartheta_0 - \vartheta_w)$ gilt unter Beachtung des dann vorliegenden Zusammenhangs $\theta(y^+) = \theta_x(x/1 = 0, y^+)$:

$$\theta_x \left(\frac{x}{1}, y^+ \right) = c\theta + \theta_{xw} \quad (20)$$

mit

$$c \left(\frac{x}{1} \right) = q_w/q_{wa} \quad (21)$$

und

$$\theta_{xw} \left(\frac{x}{1} \right) = \theta_x \left(\frac{x}{1}, 1 \right) = \frac{\vartheta_w - \vartheta_{wa}}{\vartheta_{0a} - \vartheta_{wa}} \quad (22)$$

Führt man weiterhin

$$\theta_{x0} \left(\frac{x}{1} \right) = \theta_x \left(\frac{x}{1}, y_0^+ \right) = \frac{\vartheta_0 - \vartheta_{wa}}{\vartheta_{0a} - \vartheta_{wa}} \quad (23)$$

ein, so erhält man aus den Gleichungen (20) und (21) für $y^+ = y_0^+$:

$$c \left(\frac{x}{1} \right) = \theta_{x0} - \theta_{xw} \quad (24)$$

und damit wird

$$\theta_x \left(\frac{x}{1}, y^+ \right) = (\theta_{x0} - \theta_{xw})\theta + \theta_{xw} \quad (25)$$

Zur Berechnung der wandnormalen Wärmestromdichteverteilung q/q_w ist nach Gleichung (18) die Kenntnis des Temperaturgradienten in Strömungsrichtung $\partial\vartheta/\partial x$ notwendig. In der dimensionslosen Form lässt sich diese Grösse aus Gleichung (25) berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta_x}{\partial \left(\frac{x}{1} \right)} &= \frac{d\theta_{xw}}{d \left(\frac{x}{1} \right)} (1 - \theta) + \frac{d\theta_{x0}}{d \left(\frac{x}{1} \right)} \theta \\ &= \frac{d\theta_{x0}}{d \left(\frac{x}{1} \right)} \left[(1 - \theta) \frac{d\theta_{xw}}{d\theta_{x0}} + \theta \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Aus Gleichung (17) folgt, dass die Nusselt-Zahl Nu nur dann unabhängig von x ist, wenn auch q/q_w x -unabhängig ist. Da bei der Berechnung des Quotienten q/q_w nach Einsetzen von Gleichung (26) in Gleichung (18) der Faktor $d\theta_{x0}/d(x/1)$ herausfällt, ist die vorgenannte Bedingung erfüllt für:

$$\frac{d\theta_{xw}}{d\theta_{x0}} = \frac{d\vartheta_w}{d\vartheta_0} = \text{konst.} \quad (27)$$

Für den Differentialquotienten $d\vartheta_w/d\vartheta_0$ und den mit ihm zusammenhängenden Ausdruck $d\vartheta_w/d\vartheta_m$ werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$F_0 = \frac{d\vartheta_w}{d\vartheta_0} = \text{konst.} \quad (28)$$

und

$$F_m = \frac{d\vartheta_w}{d\vartheta_m} = \text{konst.} \quad (29)$$

Die Grössen F_0 und F_m sind über die mittlere Temperatur θ_m miteinander verbunden: Unter Beachtung der Gleichungen (28) und (29) folgt aus Gleichung (12):

$$\theta_m = \frac{F_0/F_m - F_0}{1 - F_0} \quad (30)$$

und durch Umformung:

$$F_0 = \frac{1}{1 + (1/F_m - 1)/\theta_m} \quad (31)$$

$$F_m = \frac{1}{1 + (1/F_0 - 1)\theta_m} \quad (32)$$

Der Parameter F_m lässt sich durch Differentiation der Gleichung (16) mit $\alpha = \text{konst.}$ berechnen.

Nach Einführung der Stanton-Zahl

$$St = \frac{\alpha}{\rho u_m c_p} = \frac{\alpha U^+}{4q_w} \frac{d\vartheta_m}{d\left(\frac{x}{d_h}\right)} \quad (33)$$

erhält man

$$F_m = 1 + \frac{U^+}{4St} \frac{d q_w/d\left(\frac{x}{d_h}\right)}{q_w} \quad (34)$$

Da gemäss Gleichung (29) auch die Grösse F_m konstant ist, folgt aus Gleichung (34) das wichtige Ergebnis, dass von der Lauflänge x unabhängige Nusselt-Zahlen nur bei denjenigen Wärmestromdichteverteilungen zu erwarten sind, für die

$$\frac{d q_w/d\left(\frac{x}{d_h}\right)}{q_w} = \text{konst.} = m \quad (35)$$

gilt. Die Integration dieser Gleichung in den Grenzen $0 \dots x/d_h$ und $q_{wa} \dots q_w$ ergibt:

$$\frac{q_w}{q_{wa}} = e^{m(x/d_h)} \quad (36)$$

Bei der Herleitung der vorstehenden Beziehungen wurde keine Voraussetzung über die Strömungsform gemacht, sie gelten also sowohl für laminare als auch für turbulente Strömung.

Die Integration der Gleichung $F_m = 1 + mU^+/(4St)$ ergibt unter Beachtung der Gleichungen (16), (29), (30), (33) und (36) den zugehörigen Temperaturverlauf der Wand:

$$\theta_{xw} = \frac{1 - e^{mx/d_h}}{1 - 1/F_0} = \left(1 + \frac{4St}{mU^+}\right) (1 - e^{mx/d_h}) \theta_m \quad (37)$$

Bei Wärmeaustauschern liegt die nach Gleichung (36) geforderte exponentielle Wärmeflussverteilung stets vor. Die Hilfsgrösse F_{m1} für den Strömungsquerschnitt 1 lässt sich aus folgender Gleichung berechnen (für den Strömungsquer-

schnitt 2, d.h. für F_{m2} , sind die Indices 1 und 2 zu vertauschen):

$$F_{m1} = 1 - \frac{k_1}{\alpha_1} \left[1 \pm \frac{\dot{G}_1 c_{p1}}{\dot{G}_2 c_{p2}} \right] \quad (38)$$

(Plus-Zeichen bei Gleich-, Minus-Zeichen bei Gegenstrom.) Die in dieser Gleichung sowie in (31) enthaltenen Grössen $k_1 = q_{w1}/(\vartheta_{m2} - \vartheta_{m1})$, $\alpha_1 = q_{w1}/(\vartheta_{w1} - \vartheta_{m1})$ und θ_m hängen von dem gesuchten Wert F_0 ab, dieser muss daher durch Iteration bestimmt werden.

Die beiden thermischen Randbedingungen "konstanter Wärmefluss" und "konstante Wandtemperatur" sind Sonderfälle der exponentiellen Wärmeflussverteilung: $F_0 = F_m = 1$ für $q_w = \text{konst.}$ und $F_0 = F_m = 0$ für $\vartheta_m = \text{konst.}$

Die endgültige Form der Gleichungen für den wandnormalen Wärmestromdichteverlauf lauten:

(a) Kreiszyklindrische Wände

$$\frac{q}{q_w} = \frac{\int_{y^{\delta}}^{y^+} \varphi[F_0 + (1 - F_0)\theta] y^+ dy^+}{y^+ \int_{y^{\delta}}^1 \varphi[F_0 + (1 - F_0)\theta] y^+ dy^+} \quad (39)$$

(b) Ebene Wände

$$\frac{q}{q_w} = \frac{\int_0^{y^+} \varphi[F_0 + (1 - F_0)\theta] dy^+}{\int_0^1 \varphi[F_0 + (1 - F_0)\theta] dy^+} \quad (40)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist die wichtige Tatsache zu ersehen, dass nicht allein der Verlauf der Wärmeflussdichte q_w längs der Wand, sondern zusätzlich die Art und Weise, in der sich die lokalen axialen Temperaturgradienten in der Flüssigkeit einstellen, den Wärmeübergangskoeffizienten mitbestimmen.

In den speziellen Fällen $\vartheta_w = \text{konst.}$ ($F_0 = 0$) bzw. $q_w = \text{konst.}$ ($F_0 = 1$) vereinfachen sich die Ausdrücke in den eckigen Klammern zu θ bzw. 1. Daraus geht hervor, dass der wandnormale Wärmestromdichteverlauf q/q_w bei

konstantem Wärmefluss längs der Wand unabhängig vom Temperaturfeld θ und damit auch bei turbulenter Strömung unabhängig von der Prandtl-Zahl ist. Die Berechnung des Temperaturverlaufs lässt sich dadurch ohne Iteration durchführen. Der Einfluss der Prandtl-Zahl auf das Temperaturfeld und damit auf die Nusselt-Zahl bleibt jedoch auch in diesem Fall erhalten, wie aus den Gleichungen (11) und (17) hervorgeht.

In den vorausgegangenen Berechnungen wurden die Bedingungen für x -unabhängige Nusselt-Zahlen mit Hilfe desjenigen Verfahrens hergeleitet, das im Hinblick auf eine numerische Anwendung zu vorteilhaften Gleichungen führt. Zu den gleichen Ergebnissen gelangt man jedoch auch unter Beschränkung auf die Energiegleichung.

Bei laminarer Strömung als Beispiel erhält man folgende Differentialgleichung für die Temperatur θ :

$$\frac{d^2\theta}{dy^{+2}} + \frac{1}{y^+} \frac{d\theta}{dy^+} - \frac{4}{(d_h/r_w) U^+} \times \left(\frac{d\theta}{dy^+} \right)_w \frac{\varphi}{\varphi_m} \frac{F_0 + (1 - F_0)\theta}{F_0 + (1 - F_0)\theta_m} = 0. \quad (41)$$

Für ebene Wände entfällt das Glied $(d\theta/dy^+)/y^+$. Die Randbedingungen lauten: $\theta(y^+ = y_w^+) = 0$ und $\theta(y^+ = y_0^+) = 1$, der Ausdruck $(\varphi/\varphi_m)/(U^+ d_h/r_w)$ ist beim Rohr durch $4(1 - y^{+2})$, bei parallelen Platten und symmetrischem Wärmeaustausch durch $1,5(1 - y^{+2})$ und bei asymmetrischem Wärmeaustausch durch $6y^+(1 - y^+)$ zu ersetzen.

Eine anschauliche Deutung des Parameters F_0 , einschliesslich dessen Einfluss auf den Wärmeübergang, kann auf folgende Weise gegeben werden: In Abb. 2 sind die verschiedenen charakteristischen Werte bzw. Bereiche von F_0 und deren Realisation in Wärmeaustauschern dargestellt. Den folgenden Betrachtungen sei die Strömung zwischen zwei parallelen Platten zugrundegelegt, um die in diesem Zusammenhang unwichtigen Einflüsse veränderlicher Schichtoberfläche, durch die die Wärme fliesst,

auszuschalten. Die Reihenfolge in Abb. 2 ist so gewählt, dass F_0 für den Strömungsquerschnitt 1, beginnend von negativen Werten in Abb. 2a, ansteigt. Die weiteren Überlegungen zeigen nun, dass auch die auf die Temperaturdifferenz $(\vartheta_w - \vartheta_0)$ bezogene Nusselt-Zahl Nu_0 in diesem Sinne zunimmt. Betrachtet man z.B. Abb. 2a, so ist darin zu ersehen, dass es im Strömungsquerschnitt 1 wandnahe Schichten gibt, die der konvektiven Wärmeübertragung entgegenwirken. Für sie nimmt bis zum Wandabstand y_n , der durch $\partial\vartheta/\partial x = 0$ definiert ist, der Quotient $q/(\partial\vartheta/\partial x)$ negative Werte an. Dies bedeutet aber, dass sich diese Schichten trotz Wärmeabgabe der Wand ($q_w > 0$) in Strömungsrichtung abkühlen und die damit verbundene Enthalpieabnahme zu einem zusätzlichen Wärmetransport in das Gebiet $y > y_n$ führt. Die wandnormale Wärmestromdichte q/q_w , für die an ebenen Wänden infolge $\varphi = 0$ stets auch $[d(q/q_w)/dy^+]_w = 0$ gilt, nimmt dadurch zunächst Werte grösser eins an, durchläuft mit zunehmendem Wandabstand y einen Wendepunkt und erreicht an der Stelle y_n (bzw. y_n^+) ihren Maximalwert, von dem aus sie bei y_0 definitionsgemäss auf null absinkt.

Mit ansteigenden Werten F_0 verringert sich der Bereich mit $q/(\partial\vartheta/\partial x) < 0$, und für positive Werte des Parameters F_0 gilt im gesamten Strömungsquerschnitt $q/(\partial\vartheta/\partial x) \geq 0$. Die wandnahen Strömungsschichten beteiligen sich in zunehmendem Masse am konvektiven Abtransport der Wärme, wodurch der wandnormale Wärmefluss rascher abklingt. Die Folge davon ist eine Verbesserung der Wärmeübertragung, ausgedrückt durch die Erhöhung der Nusselt-Zahl Nu_0 . Formal drückt sich diese Tatsache darin aus, dass der Flächeninhalt unter der q/q_w -Kurve, der ja gemäss Gleichung (17) ein Mass für die Nusselt-Zahl ist, abnimmt (bei laminarer Strömung besteht reziproke Proportionalität). Mit steigender Prandtl-Zahl geht der Einfluss von F_0 auf Nu_0 zurück, da der Wärmeübergang in zunehmendem Mass von den Vorgängen in unmittelbarer Wandnähe bestimmt wird.

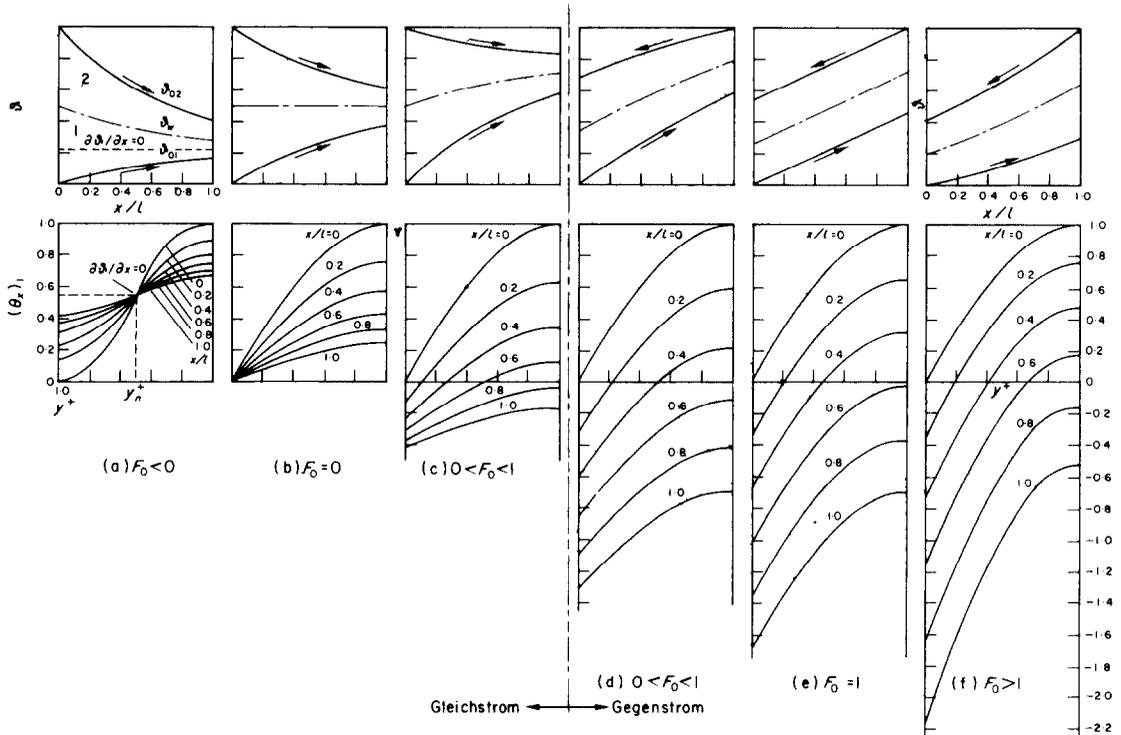


ABB. 2. Temperaturverteilungen $\vartheta_0 = f_1(x/l)$, $\vartheta_w = f_2(x/l)$ und $(\theta_x)_1 = f_3(y^+, x/l)$ für verschiedene Bereiche bzw. Werte des Parameters der Wärmeflussverteilung F_0 im Strömungsquerschnitt 1 eines Wärmeaustauschers.

Über die Grenzwerte der Nusselt-Zahl Nu_0 für $F_0 \rightarrow \pm \infty$ lassen sich qualitative Aussagen machen, ohne auf den detaillierten Rechnungsgang oder auf numerische Ergebnisse zurückgreifen zu müssen. Die der Beziehung (31) bzw. (32) entsprechenden Kurven $F_0 = f_1(F_m, \theta_m = \text{konst.})$ weisen zwei Scharen von Asymptoten auf: $F_m = 1/(1 - \theta_m)$ und $F_0 = -\theta_m/(1 - \theta_m)$. Die einem beliebigen Fall I eines Wärmeaustauschvorgangs—*I* gekennzeichnet durch den Strömungsquerschnitt, durch die thermische Randbedingung (z.B. PS-PAS, A1-A2) und bei turbulenter Strömung zusätzlich durch die Prandtl- und die Reynolds-Zahl—eindeutig zugeordneten Kurven $F_0 = f_2(F_m, I)$ schneiden für abnehmende Werte F_0 die Kurven $F_0 = f_1(F_m, \theta_m = \text{konst.})$ mit ebenfalls abnehmenden Werten θ_m .

Mit Annäherung an $F_0 \rightarrow +\infty$ geht F_m asymptotisch gegen den Grenzwert $F'_m = 1/(1 - \theta'_m)$. Dies hat zur Folge, dass dort θ_m und Nu_0 Maximalwerte annehmen: $\theta'_m = \theta_{m-\text{max}}$ und $Nu_{0-\text{max}}$. Bei abnehmenden Werten F_0 strebt die Mischungstemperatur ϑ_m mit zunehmender Annäherung an die Asymptote $F_0^+ = -\theta_m^+/(1 - \theta_m^+)$ infolge von $F_m \rightarrow -\infty$ einem konstanten Wert zu. Daraus geht hervor, dass der Wärmeübergang und damit auch der Temperaturgradient an der Wand verschwinden. Das dafür berechenbare Temperaturprofil stellt die sich asymptotisch ergebende Temperaturverteilung für den häufig auftretenden Fall dar, dass nach Beendigung eines beliebig gestalteten Wärmeaustauschs die anschließenden Wände wärmeisoliert sind [der Wert $\theta = F_0^+/(F_0^+ - 1)$ an der Stelle $\partial\vartheta/\partial x = 0$ ist identisch mit θ_m^+].

Mit noch höheren negativen Werten des Parameters F_0 , d.h. für $F_0 < -\theta_m/(1 - \theta_m)$, ist eine Umkehr des Temperaturgradienten an der Wand verbunden: $d\theta/dy^+ < 0$. Das Temperaturprofil θ nimmt mit zunehmendem Wandabstand zunächst negative Werte an, durchläuft an der Stelle, die hier mit $y^+ = y_m^+$ bezeichnet werden soll, ein Minimum, um anschliessend S-förmig bis zum Wert $\theta_0 = 1$ anzusteigen. Temperaturprofile dieser Art, gekennzeichnet durch zwei horizontale Tangenten, sind nur vorstellbar, falls die Temperaturdifferenzen zwischen zwei beliebigen Wandabständen in Strömungsrichtung abnehmen (im Gebiet $y_0^+ \dots y_m^+$, über dessen Grenzen hinweg kein Wärmeaustausch stattfindet, kann es sich nur um einen Temperatúrausgleich handeln). Dieser Umstand schliesst für den Grenzwert $F_m'' = 1/(1 - \theta_m')$ die Bedingung $d\vartheta_0/dx = 0$ in Verbindung mit einem endlichen Wert der Nusselt-Zahl Nu_0 aus. Im Gegensatz zu dem Fall $F_0 \rightarrow +\infty$ ist hier $F_0 = d\vartheta_w/d\vartheta_0 \rightarrow -\infty$ nicht durch $d\vartheta_0/dx = 0$, d.h. $\vartheta_0 = \text{konst.}$, sondern durch $d\vartheta_w/dx \rightarrow -\infty$ charakterisiert. Mit $F_m > 0$ folgt $d\vartheta_m/dx \rightarrow -\infty$, was demnach auch zu $Nu_0 \rightarrow -\infty$ führt: Das Temperaturprofil hat also die Form $\theta(y^+) = \theta_m' = \theta_{m-\text{min}} < 0$, $\theta(y_w^+) = 0$, $\theta(y_0^+) = 1$. Wegen $\theta_{m-\text{min}} < 0$, gekoppelt mit einem negativen Wert von F_0 , gibt es stets einen speziellen Fall mit $\theta_m = 0$. Die Realisation von Wärmeübertragungen mit $F_0 \leq -\theta_m/(1 - \theta_m)$ setzt eine vorhergehende Richtungsumkehr des Wärmeflusses voraus: Übergang von Heizung zu Kühlung oder umgekehrt.

2.3 Die thermische Einlauflänge

Werden die Temperaturverteilungen ϑ_w , ϑ_m und ϑ_0 in den Bereich des thermischen Einlaufs $x < x_e$ unter formaler Anwendung der bei beendetem thermischen Einlauf geltenden Gesetzmässigkeiten extrapoliert, so ergeben sich z.B für den in Abb. 3 gezeichneten Fall wandferne Zonen mit Temperaturen, die niedriger als die über den Strömungsquerschnitt ausgeglichene Zuströmtemperatur $\vartheta(x, y) = \vartheta_{ma} = \text{konst.}$ sind. Einen Aufbau des wandnormalen

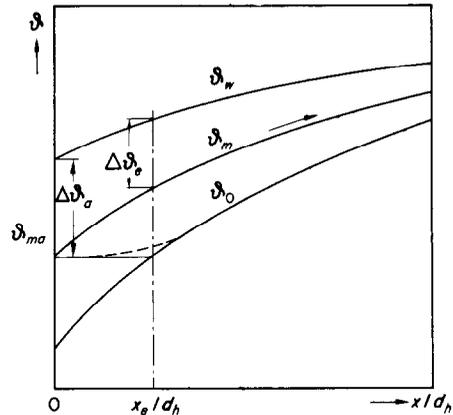


ABB. 3. Schema zur Herleitung des unteren Grenzwertes x_e der thermischen Einlauflänge.

Temperaturprofils in dieser Art, gekennzeichnet durch $(\vartheta_0 - \vartheta_{ma})/(\vartheta_w - \vartheta_m) < 0$ bzw. durch $q/(\partial\vartheta/\partial y) > 0$ schliesst der zweite Hauptsatz der Wärmelehre aus. In Wirklichkeit erhält man für ϑ_0 einen Verlauf, wie er durch die gestrichelte Linie schematisch angedeutet ist. Die Stelle x_e am Schnittpunkt der Temperaturkurven ϑ_{ma} und ϑ_0 gibt also den Ort an, stromauf dessen der thermische Einlauf auf keinen Fall abgeschlossen sein kann.

Mit den in Abb. 3 eingetragenen Bezeichnungen ergeben sich für $d\vartheta_w/d\vartheta_m = F_m$ folgende Beziehungen:

$$\int_{\Delta\vartheta_a}^{\Delta\vartheta_e/\theta_m} d\vartheta_w = F_m \int_0^{(1/\theta_m - 1)\Delta\vartheta_e} d\vartheta_m \quad (42)$$

und

$$\frac{1}{\theta_m} - \frac{\Delta\vartheta_a}{\Delta\vartheta_e} = \left(\frac{1}{\theta_m} - 1 \right) F_m \quad (43)$$

Der Quotient $\Delta\vartheta_e/\Delta\vartheta_a$ ist identisch mit der Flussverteilung $q_w/q_{wa} = \exp(mx_e/d_h)$. Damit lässt sich die Grösse x_e/d_h berechnen zu:

$$\frac{x_e}{d_h} = \frac{\ln [1/\theta_m - (1/\theta_m - 1) F_m]}{4(1 - F_m)St} U^+ \quad (44)$$

Der Vorteil der hier beschriebenen Herleitung gegenüber dem exakten Verfahren zur Berechnung der thermischen Einlauflänge liegt darin,

dass die Vorgänge innerhalb des thermischen Einlaufs nicht verfolgt zu werden brauchen. Die in verwickelter Weise vorliegende Abhängigkeit der Einlauflänge vom Strömungsquerschnitt, vom Parameter der Wärmeflussverteilung bei laminarer sowie zusätzlich von der Prandtl- und Reynolds-Zahl bei turbulenter Strömung ist in der Mischungstemperatur θ_m und der Stanton-Zahl zusammengedrängt. Die in Abb. 3 dargestellten Verhältnisse bleiben auch im allgemeinen Fall x -abhängiger Quotienten $d\vartheta_w/d\vartheta_0$ gültig. Die Folgerung, dass der thermische Einlauf stromauf der Stelle x_e nicht abgeschlossen sein kann, gilt streng; über den Grad der Abweichung des Temperaturprofils bzw. der Nusselt-Zahl an der Stelle x_e von den asymptotisch erreichbaren Endwerten lässt sich jedoch keine Aussage machen. Letzteres ist wiederum abhängig von den oben erwähnten Einflussgrößen (Strömungsquerschnitt, F_0 , Pr , Re) und kann nur durch Vergleich mit Ergebnissen von den Einlauf genau beschreibenden Berechnungen bzw. von Versuchen ermittelt werden.

Als Anwendungsbeispiel sei die dimensionslose Grösse x_e/d für die laminare Rohrströmung bei konstanter Wandtemperatur berechnet. Nach Einsetzen der Werte $\theta_m = 0,554$ und $Nu = 3,655$ in Gleichung (44) erhält man $x_e/d = 0,404 Pe$. An dieser Stelle ist nach Grigull und Tratz [12] die Nusselt-Zahl noch um 3 Prozent höher als nach beendetem thermischen Einlauf.

3. SPEZIELLE STRÖMUNGSQUERSCHNITTE

In den anschliessenden Abschnitten werden für die verschiedenen Strömungsquerschnitte auszugsweise Ergebnisse der numerischen Berechnung wiedergegeben. Den Ergebnissen für die turbulente Strömung sind dabei die hydrodynamischen Beziehungen vorangestellt, die der Lösung der Wärmeübergangsgleichungen zugrundeliegen. Für den Ringspalt und das Rohrbündel werden die Gleichungen zur expliziten Berechnung des

Wärmeübergangs bei laminarer Strömung angegeben.

Was die Interpretation der numerischen Ergebnisse anbelangt, so empfiehlt es sich, die physikalischen Zusammenhänge zwischen Strömungsquerschnitt, thermischer Randbedingung, Strömungsform und dem daraus folgenden Einfluss auf die Wärmeübertragung an dieser Stelle zusammenfassend zu skizzieren. Diese Übersicht wird einheitlich für den allgemeinen Fall des Ringspalts gegeben, in dem das Rohr, die parallelen Platten und das Rohrbündel [letzteres im Rahmen der vereinbarten Näherung $r(\tau = 0) \cong r_c$] als Sonderfälle mit enthalten sind.

Vereinfachend lässt sich folgendes umkehrbare Schema aufstellen: Eine Abnahme des Flächeninhalts unter dem τ/τ_w -Verlauf im Bereich $y_c^+ \dots y_w^+$ führt zu einer Zunahme der Völligkeit des innerhalb dieser Grenzen befindlichen Anteils der Geschwindigkeitsverteilung φ . Die damit verbundene Abnahme des Flächeninhalts unter dem q/q_w -Verlauf im Bereich $y_0^+ \dots y_w^+$ führt zu einer Zunahme der Völligkeit des dazugehörigen θ -Profils. Eine Zunahme der Völligkeit des φ -Verlaufs schliesst eine Erhöhung sowohl der mittleren Geschwindigkeit φ_m als auch des Gradienten $(d\varphi/dy)_w$ und damit des Reibungskoeffizienten ζ ein. In der gleichen Weise wirkt sich die Zunahme der Völligkeit des θ -Profils auf eine Erhöhung von θ_m , $(d\theta/dy)_w$ und von Nu aus. Der Einfluss des Parameters F_0 —einer Zunahme entspricht eine Verminderung des Flächeninhalts unter dem q/q_w -Verlauf (und umgekehrt), verbunden mit den zuvor beschriebenen Konsequenzen—ist um so grösser, je weniger der Wärmeaustausch von den wandnahen Vorgängen beherrscht wird: bei laminarer Strömung also im Fall A1 mit steigendem, im Fall A2 mit abnehmendem Wert des Radienverhältnisses r_1/r_2 und bei turbulenter Strömung zusätzlich mit abnehmender Prandtl- und abnehmender Reynolds-Zahl.

Von allen in dieser Arbeit betrachteten Strömungsquerschnitten ist nach dem voraus-

gehenden der Einfluss von F_0 beim Rohr (als Grenzfall des Ringspalts mit $r_1/r_2 = 0$ und $q_w = q_{w2}$) am höchsten. Diese Tatsache ist am deutlichsten in Abb. 16 zu ersehen.

Bei laminarer Strömung besteht unter den in Abschnitt 2.1 getroffenen Voraussetzungen Ähnlichkeit sowohl der Geschwindigkeits- als auch der Temperaturprofile für alle Prandtl- und alle Reynolds-Zahlen. Für Kanalströmungen mit linearem Druckabfall bleibt nach Abschnitt 2.2.4 diese Ähnlichkeit bei exponentiellen Wärmeflussverteilungen längs der Wand erhalten. Der Wärmeübergang wird also allein von der Querschnittsform des Kanals, von der thermischen Randbedingung (z.B. A1–A2, PS–PAS) und von der Grösse des Parameters der Wärmeflussverteilung F_0 bestimmt.

Im Vergleich zur laminaren Strömung werden bei der turbulenten Strömung das Geschwindigkeitsprofil $\varphi(y^+)$ zusätzlich von der Reynolds-Zahl und die Temperaturverteilung $\theta(y^+)$ zusätzlich von der Reynolds- und von der Prandtl-Zahl beeinflusst. Bei der Wiedergabe der numerischen Ergebnisse in Tabellen und Diagrammen erscheinen diese beiden Grössen, Re und Pr^+ , entweder als unabhängige Veränderliche oder als Parameter. Durch eine sinnvolle Wahl der Veränderlichen lässt sich der Einfluss der Reynolds-Zahl für gewisse Zusammenhänge weitgehend eliminieren. Solche Fälle liegen z.B. vor bei der Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung in der Form $u/u^+ = f(\eta)$ und der Temperaturverteilung in der Form $(\vartheta_w - \vartheta)/\vartheta^+ = f(\eta, Pr)$. Die Reynolds-Zahl ist hierbei implizit über die Schubspannungsgeschwindigkeit $u^+ = \sqrt{(\tau_w/\rho)}$ in dem dimensionslosen Wandabstand $\eta = yu^+/\nu$ —dieser hat selbst die Form einer Reynolds-Zahl—sowie in der Schubspannungstemperatur $\vartheta^+ = q_w/(\rho c_p u^+)$ enthalten.

Für den Bereich kleiner Prandtl-Zahlen zeigt es sich, dass die Einflüsse der Reynolds- und der Prandtl-Zahl auf die Wärmeübertragung ungefähr gleich gross sind und die Nusselt-Zahl nur noch vom Produkt dieser beiden Grössen, $Pe = RePr$, abhängt: $Nu = f(Pe)$. Zur Dar-

stellung der Nusselt-Zahlen für mittlere und grosse Prandtl-Zahlen wird in der vorliegenden Arbeit folgender Zusammenhang herangezogen:

$$Nu = \frac{RePr^+ \zeta/8}{1 + f(Pr^+) \sqrt{(\zeta/8)}} \quad (45)$$

Diese Formel, ebenso wie das damit zusammenhängende logarithmische Temperaturgesetz, gelten grundsätzlich für alle diejenigen Fälle von Wärmeübertragung, in denen einerseits das Geschwindigkeitsmaximum und das Temperaturoptimum an dieselbe Stelle fallen und andererseits die q/q_w - und die ε_m/ν -Verteilungen sich nicht allzusehr von dem der Herleitung zugrundegelegten Fall des Rohres unterscheiden, oder die Abweichungen davon sich in etwa kompensieren. In der Gleichung (45) schliesst der Reibungskoeffizient ζ implizit ausser der Reynolds-Zahl auch noch den Einfluss geometrischer Parameter, wie z.B. das Schrittverhältnis p/d beim Rohrbündel, mit ein (s. Abschnitt 3.5.2.3.).

3.1 Das Rohr

3.1.1 Laminare Strömung

In Abb. 4 sind die Temperaturverteilungen $\theta(y/r_w)$ für verschiedene Werte F_0 dargestellt. Das dabei zusätzlich eingezeichnete Temperaturprofil $\theta = 1 - 1,8y^{+2} + 0,8y^{+3}$ entspricht der aus einem Potenzreihenansatz gewonnenen Näherungslösung. Die Kurve $\partial\theta/\partial x = 0$ gibt im Schnittpunkt mit den Kurven $\theta(F_0 = \text{konst.} \leq 0)$ den aus der Beziehung $\theta(y_n^+) = F_0/(F_0 - 1)$ folgenden Wandabstand $y_n/r_w = 1 - y_n^+$ mit unveränderlicher Temperatur in Strömungsrichtung an. Derselbe Zusammenhang $y_n^+(F_0)$ ergibt sich in Abb. 5 aus dem geometrischen Ort der Maxima der Kurven $(1 - y/r_w) q/q_w$.

Der Einfluss des Parameters F_0 auf die Mischungstemperatur θ_m und auf die Nusselt-Zahl Nu geht aus den Abb. 15 und 16 hervor ($r_1/r_2 = 0, q_{w2}$). In Abb. 16 ist dabei insbesondere das bereits am Ende des Abschnitts 2.2.4 begründete Verhalten zu erkennen:

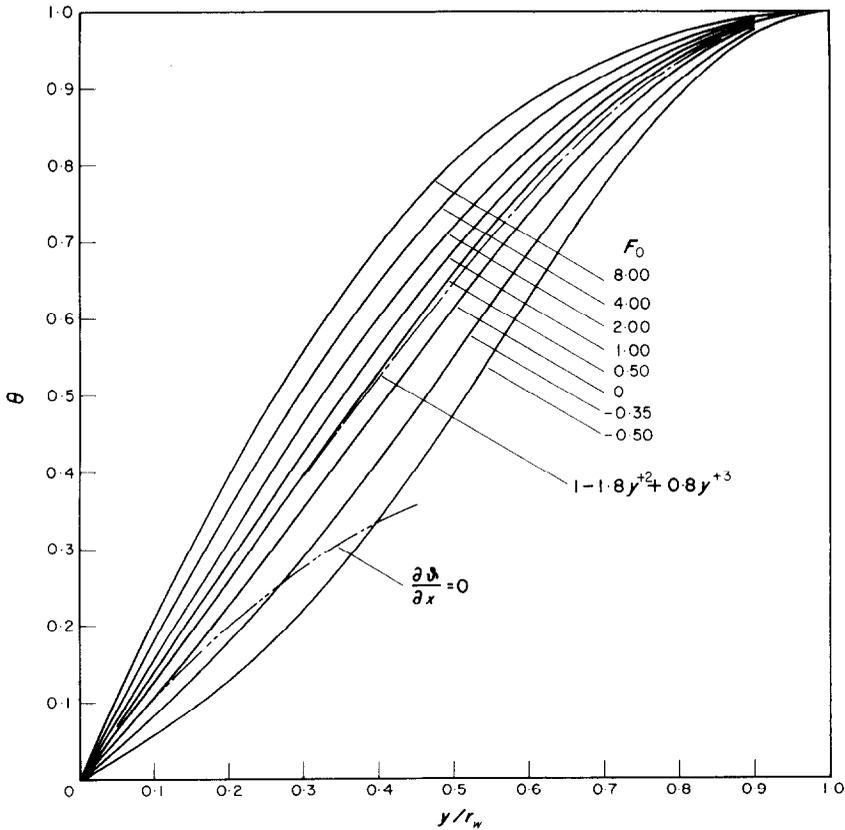


ABB. 4. Temperaturverlauf $\theta = f(y/r_w, F_0)$ bei der laminaren Rohrströmung.

$Nu \rightarrow -\infty, \theta_m = 0$ für $F_0 = F_{0d} - Nu = 0$,
 $\theta_m = \theta_{mb} > 0$ für $F_0 = F_{0b} - Nu = Nu_{max}$,
 $\theta_m = \theta_{m-max}$ für $F_0 \rightarrow +\infty$. Die Grössen F_{0d} ,
 F_{0b} , θ_{mb} und Nu_{max} nehmen dabei für jeden
 speziellen Fall I charakteristische Werte an.

3.1.2 Turbulente Strömung

3.1.2.1 Formeln für strömungsmechanische Grössen.

(a) Für die Geschwindigkeitsverteilung im Rohr und zwischen parallelen Platten hat Reichardt [7] die für den Gesamtquerschnitt gültige Gleichung

$$\frac{u}{u^+} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[(1 + \kappa\eta) \frac{1,5(1 + y^+)}{1 + 2y^{+2}} \right]$$

$$+ c_1 \left(1 - e^{-\eta/\eta_n} - \frac{\eta}{\eta_n} e^{-b_1\eta} \right) \quad (46)$$

aufgestellt. Dabei ist die Schubspannungsgeschwindigkeit u^+ und der dimensionslose Wandabstand η in der üblichen Weise definiert: $u^+ = \sqrt{(\tau_w/\rho)}$ und $\eta = u^+ y/v$. Für die Konstanten werden folgende Werte empfohlen: $\kappa = 0,4 - \eta_n = 11 - b_1 = 0,33 - c_1 = 7,8$.

Der Schnittpunkt der beiden Kurven (1) und (2) lässt sich in recht guter Näherung über den gesamten hier betrachteten Re -Bereich durch die Beziehung $\eta_s \cong 2,75 \eta_c^{0,48} \cong 0,81 Re^{0,43}$ angeben.

(b) Für den Widerstandskoeffizienten ζ beim

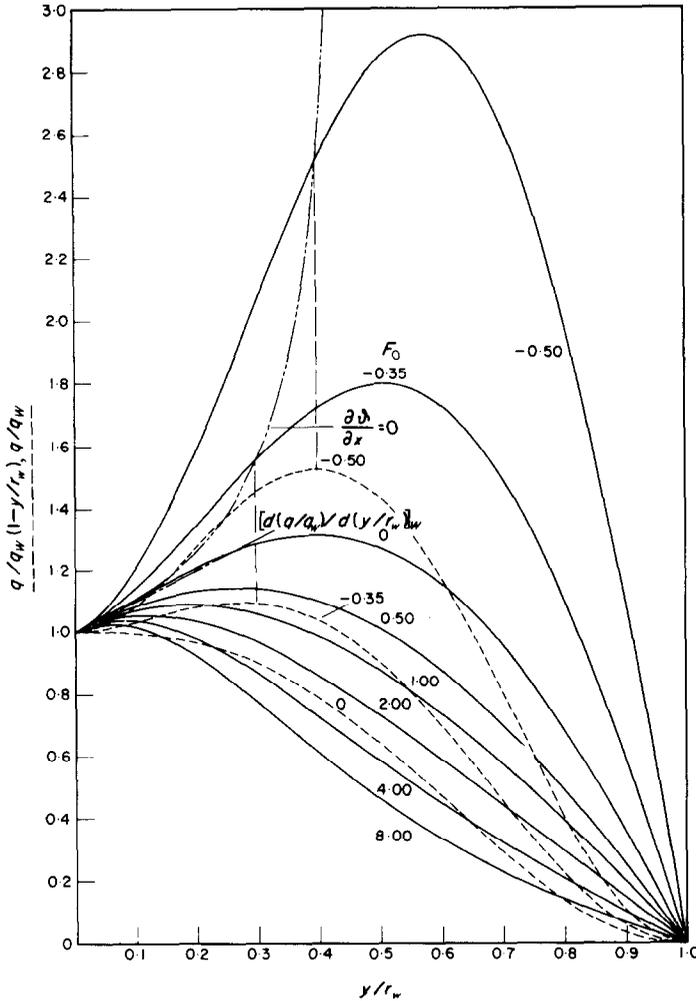


ABB. 5. Wandnormaler Wärmestromdichteverlauf $q/q_w = f_1(y/r_w, F_0)$ bzw. $(1 - y/r_w)q/q_w = f_2(y/r_w, F_0)$ bei der laminaren Rohrströmung.

glatten Rohr wird die von Prandtl aufgestellte Beziehung $1/(\sqrt{\zeta}) = 2 \log (Re\sqrt{\zeta}) - 0,8$ den Wärmeübergangsberechnungen zugrundegelegt, während für die angenäherte Wiedergabe der numerischen Ergebnisse in Form expliziter Gleichungen der Colebrook-Formel der Vorzug gegeben wird:

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta}} = 1,8 \log (Re/7) \quad (47)$$

3.1.2.2 Ergebnisse für den Wärmeübergang

(a) Die Temperaturverteilung.

Die Abhängigkeit des Temperaturverlaufs $(\epsilon_h/\epsilon_m)(\vartheta_w - \vartheta)/\vartheta^+$ vom Wandabstand η ist in Abb. 6 dargestellt (die Werte der linken Ordinatenskala sind mit den Nennern der am rechten Ende der Kurven vermerkten Massstäbe zu multiplizieren). Die strichpunktiert gezeichneten Geraden mit nur unwesentlich voneinander abweichenden Steigungen (er-

scheint durch die unterschiedlichen Masstäbe verzerrt) zeigen die Abweichungen des logarithmischen Temperaturgesetzes

$$\frac{\epsilon_h}{\epsilon_m} \frac{\vartheta_w - \vartheta}{\vartheta^+} = a \ln \eta + c(Pr^+) \quad (48)$$

von dem mit Hilfe des genauen Verfahrens ermittelten Verlauf. Als untere Grenze für die Gültigkeit dieser Näherung ergibt sich $\eta_{\min} = 25$.

Die Grösse $c(Pr^+)$ ist über Pr^+ aufgetragen (Ordinatenskala rechts) und zusammen mit a zusätzlich in der in Abb. 6 enthaltenen Tabelle für verschiedene Werte von Pr^+ angegeben. Mit Ausnahme mittlerer Prandtl-Zahlen ist der Einfluss der Reynolds-Zahl auf $c(Pr^+)$ unbedeutend. Für $Pr^+ = 10 \dots 1000$ lässt sich $c(Pr^+)$ mit guter Genauigkeit durch folgende Gleichung annähern: $c(Pr^+) = 9,5 Pr^{+0,79}$.

Für den Vergleich der Temperaturverteilungen mit experimentell gewonnenen Ergebnissen

ist nun die Kenntnis des Quotienten ϵ_h/ϵ_m notwendig. Darüber geben die Versuche von Johnk *et al.* [13] Aufschluss, die an einem von Luft durchströmten und mit konstantem Wärmefluss beheizten Rohr vorgenommen wurden. Für den mittleren Teil des Strömungsquerschnitts ergaben sich folgende Werte für den Quotienten ϵ_h/ϵ_m : 1,23 ($Re = 18000$) – 1,30 ($Re = 35000$) – 1,24 ($Re = 71000$). Für $Re = 3 \cdot 10^4$ erhält man also unter Berücksichtigung von $a = 3,17 - c(Pr^+) = 0,207 - \epsilon_h/\epsilon_m = 1,30$ die Gleichung $(\vartheta_w - \vartheta)/\vartheta^+ = 2,44 \ln \eta + 2,15$, die in guter Übereinstimmung mit den von Johnk *et al.* einerseits und von Deissler *et al.* [14] andererseits an Luft gemessenen Temperaturverteilungen ist (die maximalen Abweichungen betragen weniger als 5 Prozent).

In Tabelle I sind für die verschiedenen hier behandelten Strömungsquerschnitte—formal auch angewandt auf die Fälle A1 und PAS,

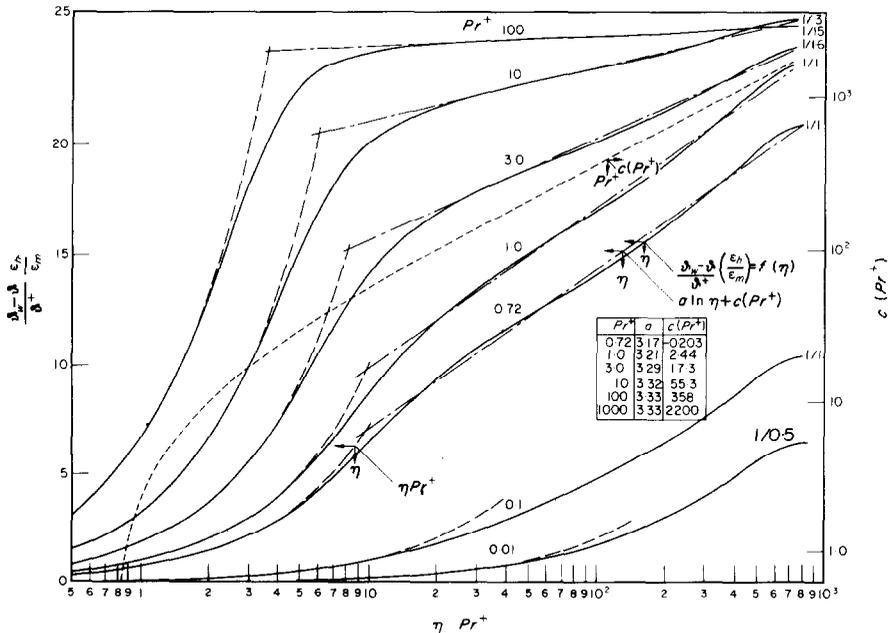


ABB. 6. Temperaturverlauf $(\epsilon_h/\epsilon_m) (\vartheta_w - \vartheta)/\vartheta^+ = f(\eta, Pr^+)$ bei turbulenter Rohrströmung für $q_w = \text{konst.}$ und $Re = 3 \cdot 10^4$.

Tabelle 1. Koeffizienten a und $c(Pr^+)$ des bei turbulenter Strömung für $\eta > 25$ näherungsweise gültigen Temperaturgesetzes $(\epsilon_h/\epsilon_m)(\vartheta_w - \vartheta)/\vartheta^+ = a \ln \eta + c(Pr^+)$, angewandt auf die verschiedenen Strömungsquerschnitte bei $q_w = \text{konst.}$: $a_{rp}(Pr^+, Re_T)$ und $c_{rp}(Pr^+, Re_T)$, $a_p(Pr^+)$ und $c_p(Pr^+)$, a als Bestwert für $c(Pr^+) \neq f(Re_T)$

Pr^+	Re_T		T	PS	PAS	r_1/r_2				p/d				
						0,7	0,4	0,2	0,1	1,25	1,60	1,95	3,50	
1,0	10^4	a_{rp}	3,41	3,18	5,00	4,76	3,82	2,64	1,60	2,80	2,46	2,19	1,34	
		c_{rp}	1,87	2,41	-5,49	-4,69	-0,95	3,47	6,89	3,68	4,77	5,53	7,90	
	10^5	a_{rp}	3,05	2,96	3,79	3,59	3,14	2,44	1,73	2,71	2,50	2,36	1,85	
		c_{rp}	2,97	3,27	-0,82	0,29	2,20	5,29	8,44	4,27	5,05	5,59	7,44	
	10^6	a_{rp}	2,83	2,79	3,16	3,08	2,81	2,42	2,00	2,63	2,50	2,41	2,15	
		c_{rp}	3,78	3,94	1,90	2,57	3,78	5,60	7,66	4,66	5,21	5,53	6,60	
	10^4-	a_p	2,87	2,83	3,29	3,18	2,88	2,46	2,05	2,66	2,52	2,43	2,18	
	10^6	c_p	3,82	3,88	1,69	2,34	3,62	5,29	6,62	4,54	4,99	5,26	5,84	
10	10^4	a_{rp}	3,59	3,36	5,31	4,99	3,98	2,72	1,65	2,93	2,56	2,28	1,38	
		c_{rp}	54,9	54,9	46,0	47,5	51,2	55,3	57,5	56,2	57,2	57,6	58,8	
	10^5	a_{rp}	3,13	3,03	3,98	3,75	3,23	2,48	1,73	2,75	2,53	2,37	1,85	
		c_{rp}	55,8	56,1	50,4	52,5	54,7	58,1	61,2	57,2	58,0	58,5	60,3	
	10^6	a_{rp}	2,88	2,84	3,33	3,21	2,88	2,43	1,97	2,64	2,50	2,40	2,12	
		c_{rp}	56,4	56,6	52,8	54,8	56,0	58,4	60,5	57,6	58,3	58,7	59,9	
	10^4-	a_p	3,00	2,97	3,73	3,56	3,12	2,56	2,16	2,75	2,58	2,47	2,27	
	10^6	c_p	56,7	56,4	52,5	53,9	55,6	57,0	57,6	57,2	57,6	57,8	57,3	
100	10^4	a_{rp}	3,62	3,37	5,36	5,03	4,00	2,73	1,65	2,94	2,57	2,28	1,39	
		c_{rp}	360	358	347	350	354	356	354	359	359	358	355	
	10^5	a_{rp}	3,14	3,05	4,05	3,80	3,26	2,49	1,73	2,76	2,53	2,37	1,85	
		c_{rp}	359	358	348	354	356	359	362	359	360	361	361	
	10^4-	a_p	2,82	2,89	3,55	3,52	3,07	2,63	2,56	2,70	3,45	2,54	2,72	
	$3 \cdot 10^5$	c_p	361	359	352	357	358	358	355	359	363	360	356	
	1000	10^4	a_{rp}	3,63	3,39	5,43	5,05	3,96	2,79	1,59	2,92	2,58	2,18	1,31
			c_{rp}	2220	2200	2180	2200	2200	2190	2170	2200	2210	2210	2180
10^5		a_{rp}	3,12	3,04	4,03	3,80	3,25	2,47	1,73	2,76	2,54	2,36	1,84	
		c_{rp}	2200	2200	2170	2200	2200	2200	2190	2200	2210	2210	2200	
10^4-		a_p	2,16	2,62	2,58	3,56	2,47	2,52	3,51	2,67	2,63	2,71	4,17	
$3 \cdot 10^5$		c_p	2210	2210	2180	2200	2200	2200	2190	2210	2210	2200	2190	
1-1000		a	2,87	2,83	3,30	3,19	2,88	2,45	2,04	2,65	2,51	2,42	2,16	
1		c	3,83	3,90	1,63	2,34	3,61	5,33	6,68	4,56	5,04	5,29	5,91	
10	c	57,4	57,2	55,1	56,1	57,0	57,9	58,3	57,7	58,0	58,1	57,9		
100	c	360	360	353	359	359	359	358	360	360	360	359		
1000	c	2210	2210	2170	2200	2200	2200	2190	2210	2210	2210	2200		

für die die Herleitung der Gleichung (48) nicht gilt—die Koeffizienten a und $c(Pr^+)$ in Abhängigkeit von der Prandtl- und von der Reynolds-Zahl für $q_w = \text{konst.}$ zusammengestellt. Diese Koeffizienten wurden nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate für die Gesamtheit der über $\eta = 25$ berechneten Temperaturen ermittelt: a_{rp} und c_{rp} gelten für

die jeweils angegebenen Reynolds- und Prandtl-Zahlen; a_p und c_p gelten für $Pr^+ = \text{konst.}$ und die in Abhängigkeit von Pr^+ angegebenen Re -Bereiche. Der Koeffizient a ist der für $Pr^+ = 1 \dots 1000$ und für die einzelnen Re -Bereiche durch Probieren gewonnene Bestwert für nur von der Prandtl-Zahl abhängige Koeffizienten c . Für $Pr^+ = \text{konst.}$ hängen die

Koeffizienten $a_{r,p}$ von der Reynolds-Zahl ab, dagegen ist der Einfluss von Pr^+ für $Re = \text{konst.}$ nur gering.

Es ist nun noch interessant zu wissen, in welchem Mass die Nusselt-Zahl von den Vorgängen in den einzelnen Bereichen des Strömungsquerschnitts—und hier insbesondere bei welchem Verhältnis von molekularem und turbulentem Anteil am Wärmeaustausch—beeinflusst wird. Hierüber gibt die Abb. 6 einen anschaulichen Einblick. Aus der Beziehung $Nu_0 = RePr\sqrt{(\zeta/8)}\vartheta^+(\vartheta_w - \vartheta_0)$ ist zu ersehen, dass die Nusselt-Zahl dem Maximalwert $(\vartheta_w - \vartheta_0)/\vartheta^+$ der Temperaturverteilung $(\vartheta_w - \vartheta)/\vartheta^+$ umgekehrt proportional ist. Der Verlauf der Kurven $(\vartheta_w - \vartheta)/\vartheta^+$ gibt also über den Wert des Quotienten $(\vartheta_w - \vartheta)/(\vartheta_w - \vartheta_0)$ für jede Stelle η den Anteil an der Bildung der Nusselt-Zahl an. In Abb. 6 werden durch die halblogarithmische Darstellung besonders die Vorgänge in dem wichtigen Bereich grosser Wandnähe hervorgehoben. Es zeigt sich nun das interessante Verhalten, dass für grosse Prandtl-Zahlen der grösste Teil des Temperaturanstiegs bereits in der wärmeleitenden Unterschicht und in demjenigen Bereich der daran anschliessenden Übergangszone stattfindet, in dem die durch molekularen und turbulenten Austausch bedingten Anteile von derselben Grössenordnung sind. (Die Wandabstände η_b mit $q_t = q_m$ befinden sich ungefähr an der Stelle, an der sich die Kurven ηPr^+ und $a \ln \eta + c(Pr^+)$ schneiden.) Diese Tatsache erklärt, warum der Einfluss der Prandtl-Zahl auf Nu mit steigendem Pr abnimmt (gekennzeichnet durch die Abnahme des Exponenten d in der Beziehung $Nu = bRe^cPr^d$): In der wärmeleitenden Unterschicht gilt $(\vartheta_w - \vartheta)/\vartheta^+ = \eta Pr^+$. Ein gleichartiges Verhalten liegt auch bei kleinen Prandtl-Zahlen vor (für $Re = 3 \cdot 10^4$ ergibt sich im mittleren Strömungsabschnitt mit $\eta_c = 813$ aus $Pr^+ \varepsilon_m/\nu \cong 0,07 \eta_c Pr^+ : q_t/q_m = 0,6$ für $Pr^+ = 0,01$ und $q_t/q_m = 5,7$ für $Pr^+ = 0,1$). Der Einfluss der Prandtl-Zahl auf die Nusselt-Zahl ist bei mittleren Prandtl-Zahlen am grössten: Der Anteil des Temperaturanstiegs

im Bereich $q_t/q_m \gg 1$ überwiegt jenen im Bereich $q_t/q_m \leq 1$. Diese Eigenschaft ist umso stärker ausgeprägt, je grösser die Reynolds-Zahl ist: In Bezug auf die in Abb. 6 dargestellten Kurven drückt sich eine Erhöhung von Re näherungsweise in einer Zunahme der Temperatur $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w - \vartheta)/\vartheta^+$ längs der in das Gebiet $\eta > \eta_c$ ($Re = 3 \cdot 10^4$) = 813 verlängerten Gerade $a \ln \eta + c(Pr^+)$ aus, während im Bereich $q_t/q_m \leq 1$ keine wesentliche Änderung eintritt. Auf diese Zusammenhänge wird auch nochmals in den zu Abb. 8 gegebenen Erläuterungen eingegangen.

Einige Bemerkungen sind an dieser Stelle noch bezüglich des ε_m/ν -Wandgesetzes angebracht. Aus den durch die Theorie einerseits und durch das Experiment (Index e) andererseits für hohe Prandtl-Zahlen gewonnenen Beziehungen $Nu = bRe^cPr^d$ und $Nu_e = b_eRe^cPr^d$ lässt sich ein für die Nusselt-Zahl wirksamer Wert des Quotienten $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ definieren: $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{Nu} = (b_e/b)^{1/d}$ für $Nu = Nu_e$. Da der Koeffizient d für grosse Prandtl-Zahlen klein ist, nimmt der Quotient $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{Nu}$ schon bei geringen Abweichungen zwischen b und b_e verhältnismässig grosse Werte an. Ob diese die tatsächlich vorliegenden Zusammenhänge richtig wiedergeben, hängt ausschlaggebend von der Güte des der Theorie zugrundegelegten ε_m/ν -Wandgesetzes ab. Aus diesem Grund ist es auch umgekehrt nicht möglich, ohne die genaue Kenntnis von $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ aus dem Grad der Übereinstimmung zwischen den für grosse Prandtl-Zahlen experimentell und analytisch bestimmten Nusselt-Zahlen eindeutige Schlüsse über die Güte des gewählten ε_m/ν -Gesetzes zu ziehen.

Die hier geschilderten Gesichtspunkte sind zu bedenken, wenn die mit dem ε_m/ν -Wandgesetz von Deissler [15]:

$$\varepsilon_m/\nu = n^2 \eta (u/u^+) [1 - \exp(-n^2 \eta u/u^+)] \quad (n = 0,124) \quad (49)$$

und die mit dem ε_m/ν -Wandgesetz (1) von Reichardt [6] berechneten Nusselt-Zahl mit Messergebnissen verglichen werden. Für

$Pr = Pr^+ = 100$ sind die von Deissler ermittelten Nusselt-Zahlen in guter Übereinstimmung mit dem Experiment (z.B. von Friend *et al.* [16]), während die in der vorliegenden Arbeit berechneten Werte um etwa 25 Prozent zu niedrig liegen. Die beiden Ansätze bezüglich ε_m/ν unterscheiden sich z.B. für $\eta = 3$ —nach Abb. 6 ein für $Nu(Pr^+ = 100)$ entscheidender Wandabstand—um fast den Faktor 3. Dieser Faktor entspricht andererseits ungefähr dem Wert des Quotienten $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{Nu}$, den man aus der obenangeführten Beziehung $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{Nu} = (b_e/b)^{1/d}$ für $b_e/b = 1,25$ und $d = 0,25$ erhält.

Die gute Übereinstimmung zwischen dem Experiment und der mit dem ε_m/ν -Wandgesetz von R. G. Deissler für grosse Prandtl-Zahlen $Pr = Pr^+$ berechneten Nusselt-Zahlen bedeutet physikalisch, dass dieses Wandgesetz eher die ε_h/ν - als die ε_m/ν -Verteilung beschreibt (aus den Gleichungen (6) und (7) folgt $Pr^+ \varepsilon_m/\nu = Pr \varepsilon_h/\nu$, d.h. $\varepsilon_h = \varepsilon_m$ für $Pr = Pr^+$ anstelle von

$\varepsilon_h > \varepsilon_m$, wie für grosse Prandtl-Zahlen zu erwarten ist). Werden die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Berechnungen mit diesem $(\varepsilon_m/\nu)_D$ -Wandgesetz von R. G. Deissler (Index *D*) anstelle des $(\varepsilon_m/\nu)_R$ -Wandgesetzes von Reichardt (Index *R*) im Bereich $\eta \leq 12,9$ wiederholt (bei $\eta = 12,9$ liefern die beiden genannten Wandgesetze gleich hohe Werte), so ergeben sich für das Rohr im gesamten Bereich $Pr = Pr^+ = 0,72 \dots 1000$ die von Deissler berechneten Nusselt-Zahlen. Die Inkonsequenz, die dabei begangen wird, indem für $\eta \leq 12,9$ mit ε_h/ν und für $\eta > 12,9$ mit ε_m/ν gerechnet wird (für letzteres gilt nach wie vor $\varepsilon_h \neq \varepsilon_m$), ist von geringem Einfluss. Dies rührt daher, dass sich bei grossen Prandtl-Zahlen das Temperaturprofil ab $\eta = 12,9$ nur noch wenig ändert (s. Abb. 6, $Pr^+ = 100$). Bei mittleren Prandtl-Zahlen reicht umgekehrt die wärmeleitende Unterschicht bis nahe an $\eta = 12,9$, so dass sich Unterschiede in den zugrundegelegten ε_m/ν -

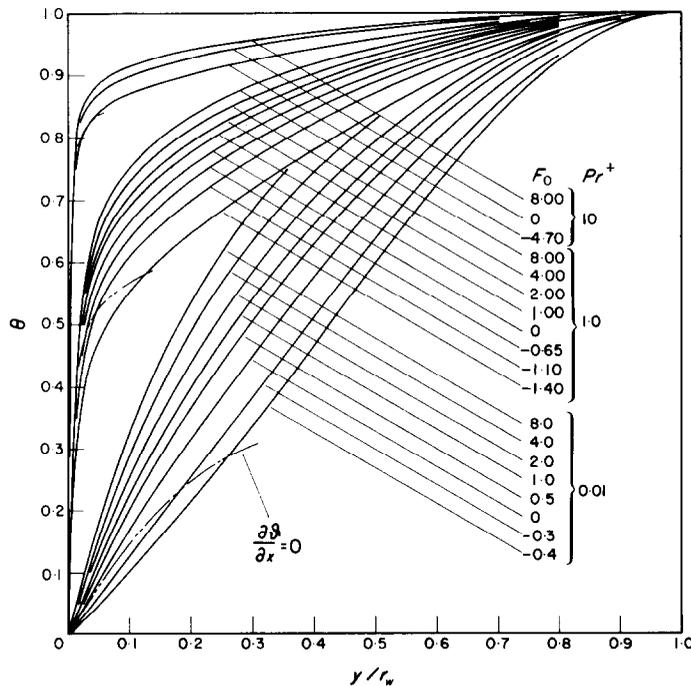


ABB. 7. Temperaturverlauf $\theta = f(y/r_w, Pr^+, F_0)$ bei turbulenter Rohrströmung für $Re = 3 \cdot 10^4$.

Wandgesetzen nur wenig auswirken (s. Abb. 6. $Pr^+ = 1$; für $Pr = Pr^+ = 1$ gilt im Mittel $Nu_D/Nu_R = 1,02$). Letzteres ist auch der Grund dafür, dass die Anwendung der beiden Wandgesetze $(\varepsilon_m/\nu)_D$ und $(\varepsilon_m/\nu)_R$ bei der Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes zu annähernd denselben Ergebnissen führt: Die beiden Wandgesetze unterscheiden sich hauptsächlich innerhalb des Bereichs der laminaren Unterschicht, in der der Einfluss von ε_m/ν auf die Geschwindigkeitsverteilung verschwindet.

Wird nun davon ausgegangen, dass die mit $(\varepsilon_m/\nu)_D$ berechneten Nusselt-Zahlen ab mittleren

Prandtl-Zahlen $Pr = Pr^+$ zuverlässige Werte ergeben (in den beiden Abb. 11 und 26 sind die auf diese Weise ermittelten Nusselt-Zahlen mit experimentellen Ergebnissen verglichen), so lässt sich der weiter oben definierte Quotient $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{Nu}$ berechnen. Er ergibt sich aus $Nu_R(Pr_R^+) = Nu_D(Pr_D^+ = Pr)$ zu $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{Nu} = Pr_R^+/Pr_D^+$. Für $Pr = 0,72 \dots 100$ und sämtlich hier behandelten Strömungsquerschnitte erhält man folgende Näherungsgleichung:

$$\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_m} = 0,91 + 0,13 Pr^{0,545}. \quad (50)$$

Tabelle 2. Mischungstemperatur θ_m für turbulente Strömung in Rohren (T), zwischen parallelen Platten bei symmetrischem (PS) bzw. asymmetrischem Wärmeaustausch (PAS) und längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung, $p/d = 1,25 - 1,60 - 1,95 - 3,50$) bei konstantem Wärmefluss in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl Pr^+ und von der Reynolds-Zahl Re

p/d	Re	Pr^+						
		0	0,01	0,03	0,1	1	10	100
1,25	$9,45 \cdot 10^3$	0,748	0,754	0,765	0,793	0,895	0,969	0,993
	$6,70 \cdot 10^4$	0,729	0,753	0,780	0,823	0,912	0,973	0,995
	$6,50 \cdot 10^5$	0,720	0,798	0,833	0,868	0,927	0,975	0,995
	$6,37 \cdot 10^6$	0,715	0,854	0,878	0,900	0,939	0,977	0,995
1,60	$1,00 \cdot 10^4$	0,770	0,776	0,787	0,815	0,909	0,974	0,994
	$7,02 \cdot 10^4$	0,753	0,776	0,803	0,845	0,926	0,978	0,996
	$6,72 \cdot 10^5$	0,745	0,821	0,854	0,887	0,940	0,980	0,996
	$6,51 \cdot 10^6$	0,740	0,875	0,897	0,916	0,950	0,982	0,996
1,95	$1,06 \cdot 10^4$	0,788	0,794	0,805	0,832	0,920	0,977	0,995
	$7,36 \cdot 10^4$	0,771	0,794	0,821	0,861	0,936	0,982	0,996
	$6,95 \cdot 10^5$	0,764	0,839	0,871	0,901	0,949	0,984	0,997
	$6,65 \cdot 10^6$	0,760	0,891	0,911	0,929	0,958	0,985	0,997
3,50	$1,26 \cdot 10^4$	0,834	0,840	0,850	0,875	0,946	0,986	0,997
	$8,59 \cdot 10^4$	0,820	0,843	0,868	0,903	0,961	0,990	0,998
	$7,80 \cdot 10^5$	0,814	0,886	0,914	0,938	0,971	0,991	0,998
	$7,18 \cdot 10^6$	0,812	0,931	0,946	0,958	0,977	0,992	0,999
PS	$8,66 \cdot 10^3$	0,722	0,728	0,739	0,768	0,877	0,963	0,992
	$6,21 \cdot 10^4$	0,702	0,726	0,755	0,799	0,896	0,967	0,993
	$6,08 \cdot 10^5$	0,693	0,774	0,811	0,847	0,913	0,969	0,993
	$6,00 \cdot 10^6$	0,688	0,833	0,858	0,882	0,926	0,971	0,994
PAS	$8,66 \cdot 10^3$	0,701	0,705	0,712	0,732	0,829	0,941	0,987
	$6,21 \cdot 10^4$	0,689	0,704	0,723	0,757	0,850	0,945	0,988
	$6,08 \cdot 10^5$	0,683	0,738	0,767	0,800	0,870	0,948	0,988
	$6,00 \cdot 10^6$	0,680	0,787	0,811	0,835	0,887	0,950	0,989
T	$4,00 \cdot 10^3$	0,557	0,567	0,583	0,626	0,794	0,935	0,985
	$3,00 \cdot 10^4$	0,533	0,568	0,610	0,677	0,829	0,945	0,989
	$3,00 \cdot 10^5$	0,523	0,642	0,697	0,754	0,858	0,950	0,989
	$3,00 \cdot 10^6$	0,518	0,733	0,773	0,809	0,881	0,951	0,990

Setzt man diese Gleichung in Gleichung (52) ein [$Pr^+ = Pr(\epsilon_h/\epsilon_m)_{Nu}$], so betragen die Abweichungen gegenüber den Werten Nu_D ca. ± 1 Prozent. Für $Pr = 1000$ dagegen sind die mit den Gleichungen (50) und (52) berechneten Nusselt-Zahlen ca. 10 Prozent höher als Nu_D .

Der Quotient $(\epsilon_h/\epsilon_m)_{Nu}$ stellt einen Integral-Mittelwert für die mit Gleichung (17) berechnete Nusselt-Zahl dar. Gemäss der Beziehung $Nu_0 = RePr^+ \sqrt{(\zeta/8) \vartheta^+ / [(\epsilon_h/\epsilon_m) (\vartheta_w - \vartheta_0)]}$ gilt dieser Mittelwert auch für die Temperatur ϑ_0 der Temperaturverteilung in der Form $(\epsilon_h/\epsilon_m) (\vartheta_w - \vartheta) / \vartheta^+$. Es muss jedoch hervorgehoben werden, dass der Quotient $(\epsilon_h/\epsilon_m)_{Nu}$, bzw. die Gleichung (50) nur für diejenigen Berechnungen gültig ist, denen das ϵ_m/ν -Wandgesetz von H. Reichardt zugrundeliegt.

Der Einfluss der Wärmeflussverteilung F_0 auf den Temperaturverlauf $\theta(y/r_w)$ geht aus Abb. 7 hervor. Dieser Einfluss kommt bei der Temperaturverteilung noch deutlicher zum Ausdruck als bei der Nusselt-Zahl, wie das Beispiel $Pr^+ = 1$ im Vergleich zu Abb. 10 zeigt.

(b) Die Mischungstemperatur.

Die Mischungstemperatur θ_m ist für den Fall $q_w = \text{konst.}$ in Tabelle 2 und für den Fall $q_w \neq \text{konst.}$ in Tabelle 3 aufgeführt.

(c) Die Nusselt-Zahl.

Wie bereits in Zusammenhang mit der Abb. 6 aufgezeigt wurde, geht der Einfluss der Prandtl-Zahl auf die Nusselt-Zahl mit Annäherung sowohl an sehr kleine als auch an sehr grosse Prandtl-Zahlen zurück. Dieser Sachverhalt kommt in Abb. 8 durch den Verlauf der Neigungen an die Kurven $Nu = f(Pr^+, Re = \text{konst.})$ zum Ausdruck. Die Prandtl-Zahlen Pr_1^+ , für die der Einfluss auf die Nusselt-Zahl am grössten ist, hängen von der Reynolds-Zahl ab. In Abb. 8 ergeben sich Werte Pr_1^+ , die ungefähr auf einer Geraden zwischen den Wertepaaren $Pr_1^+ = 0,15 - Re = 3 \cdot 10^6$ und $Pr_1^+ = 0,8 - Re = 4 \cdot 10^3$ liegen.

In der Darstellung $Nu = f(Pr^+, Re = \text{konst.})$ unterscheiden sich die Kurvenverläufe in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl beträchtlich. Zieht man dagegen von $Nu(Pr^+, Re)$ den durch Wärmeleitung bedingten Anteil $Nu(Pr = 0, Re)$ ab, so nehmen die dem rein turbulenten Anteil

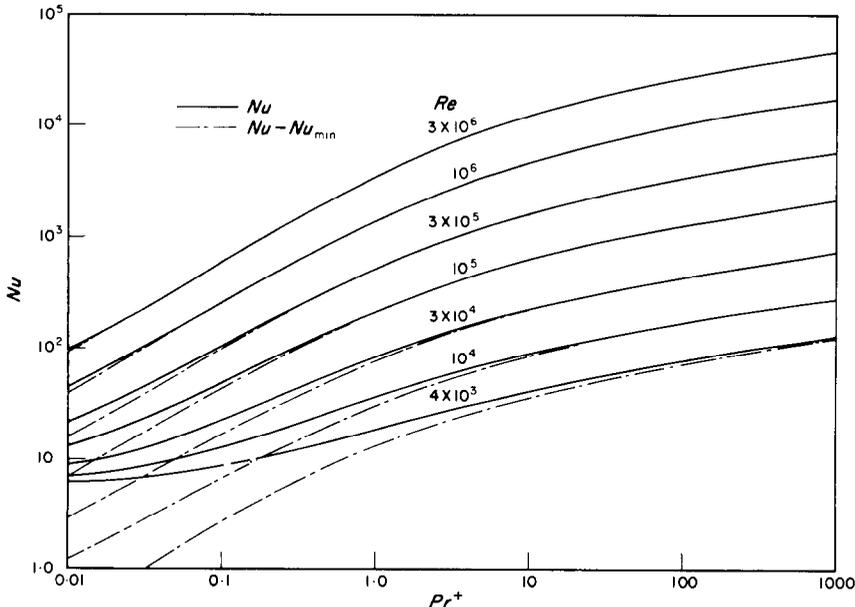


ABB. 8. Nusselt-Zahlen $Nu = f_1(Pr^+, Re)$ und $Nu - Nu_{\min} = f_2(Pr^+, Re)$ bei der turbulenten Rohrströmung für $q_w = \text{konst.}$

am Wärmeaustausch entsprechenden Differenzen $Nu - Nu(Pr = 0, Re) = f(Pr^+, Re)$ einen einheitlichen Verlauf an. Um die nur geringfügige Re -Abhängigkeit der Funktion $Nu(Pr = 0, Re)$ zu umgehen, sind in Abb. 8 die mit der Nusselt-Zahl $Nu_{\min} = Nu(Pr = 0, Re = 4 \cdot 10^3)$ gebildeten Differenzen $Nu - Nu_{\min} = f(Pr^+, Re)$ eingezeichnet (strichpunktierte Linien). Die daraus entnommenen Neigungen $d'(Pr^+, Re)$, die dem Exponenten der Prandtl-Zahl in der Gleichung $Nu = Nu_{\min} + b Re^c Pr^{+d}$ entsprechen, wurden für die Auftragung in Abb. 9 dahingehend korrigiert, dass die für kleine Prandtl-Zahlen bestehende leichte Re -Abhängigkeit des Koeffizienten $b'(Pr^+, Re)$ durch einen mittleren Verlauf $b(Pr^+)$ ersetzt werden kann.

Die Koeffizienten b , c und d der Beziehung $Nu = Nu_{\min} + b Re^c Pr^{+d}$ sind in Abb. 9 über Pr^+ aufgetragen. Wie man sieht, laufen die Kurven c und d im Bereich kleiner Prandtl-Zahlen in etwa zusammen: $c \cong d \cong 0,75$. Da auch der Proportionalitätsfaktor b in diesem Bereich nahezu konstant ist, folgt die für

Flüssigmetalle experimentell gut bestätigte Beziehung $Nu = a + b(RePr)^c$. Die Koeffizienten a , b und c wurden aus den für die Prandtl-Zahlen $Pr^+ = 0,01$ und $Pr^+ = 0,03$ berechneten Wertegruppen Nu , Re , Pr^+ nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate ermittelt (eine Zusammenstellung der Koeffizienten a , b und c für alle hier behandelten Fälle T, PS, PAS, A1, A2 und B liegt in Abb. 19 vor). Die Nusselt-Zahlen für das Rohr liegen bei kleinen Prandtl-Zahlen zwischen denjenigen für die parallelen Platten bei asymmetrischem ($Nu_T > Nu_{PAS}$) und symmetrischem Wärmeaustausch ($Nu_T < Nu_{PS}$). Dabei nähert sich Nu_T mit steigender Péclet-Zahl gegen Nu_{PS} und mit abnehmender Péclet-Zahl gegen Nu_{PAS} (bei der laminaren Strömung lautet die Reihenfolge $Nu_T < Nu_{PAS} < Nu_{PS}$). Für die drei letztgenannten Fälle ergeben sich folgende Gleichungen ($q_w = \text{konst.}$):

$$Nu_T = 5,7 + 0,041 (RePr^+)^{0,75} \quad (51a)$$

$$Nu_{PS} = 9,7 + 0,030 (RePr^+)^{0,78} \quad (51b)$$

$$Nu_{PAS} = 5,6 + 0,016 (RePr^+)^{0,81} \quad (51c)$$

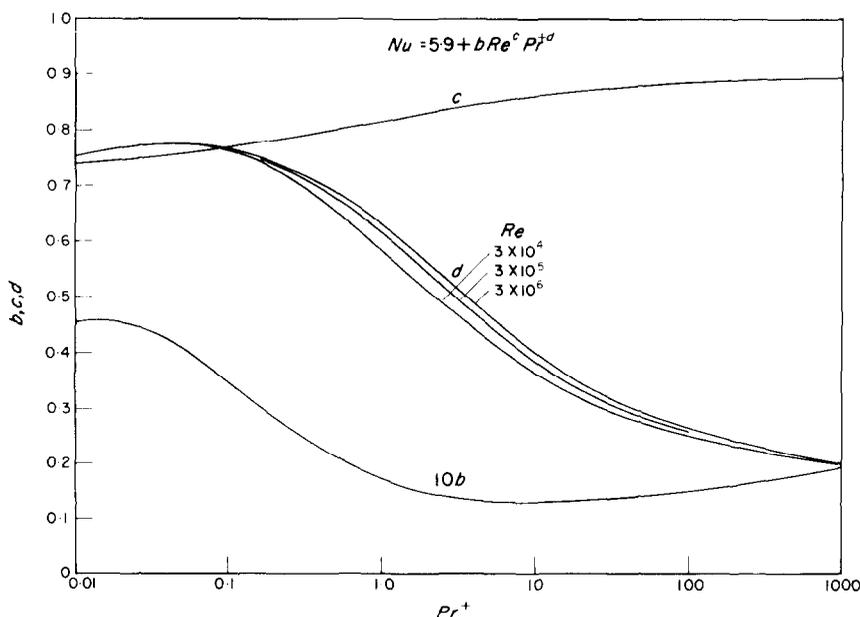


ABB. 9. Koeffizienten $b = f_1(Pr^+)$, $c = f_2(Pr^+)$ und $d = f_3(Pr^+, Re)$ der Beziehung $Nu = 5,9 + b Re^c Pr^{+d}$ bei der turbulenten Rohrströmung für $q_w = \text{konst.}$

Die für kleine Prandtl-Zahlen und konstante Wärmeflussverteilung ($F_0 = 1$) durch das Produkt $RePr^+$ hinreichend genau erfasste Abhängigkeit des Wärmeübergangs von den beiden unabhängigen Grössen Re und Pr^+ bleibt auch für $F_0 \neq 1$ erhalten: $Nu(RePr^+)$, $\theta(y^+, RePr^+)$ und $\theta_m(RePr^+)$. Damit folgt aus Gleichung (44) auch für die thermische Einlaufänge $x_e/d_h \cong f(RePr^+)$ (bei laminarer Strömung besteht Proportionalität $x_e/d_h \sim RePr$, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben ist).

Ab mittleren Prandtl-Zahlen kann das Glied Nu_{\min} gegenüber $b Re^c Pr^{+d}$ vernachlässigt wer-

den, und man erhält $Nu = b Re^c Pr^{+d}$. Die letztgenannte Beziehung eignet sich jedoch durch die Abhängigkeit der Koeffizienten b , c und d von der Prandtl-Zahl nur in unbefriedigender Weise zur Wiedergabe der Nusselt-Zahl über einen grösseren Bereich der Prandtl-Zahl. Zieht man noch die zusätzliche Abhängigkeit des Koeffizienten b von der Reynolds-Zahl in Betracht, so ergibt sich ein deutlicher Vorteil der Formel (45) im Vergleich zum Potenzgesetz.

Die Werte $f(Pr^+)$ in Gleichung (45) sind negativ für $Pr^+ < A$, wobei A von dem betrach-

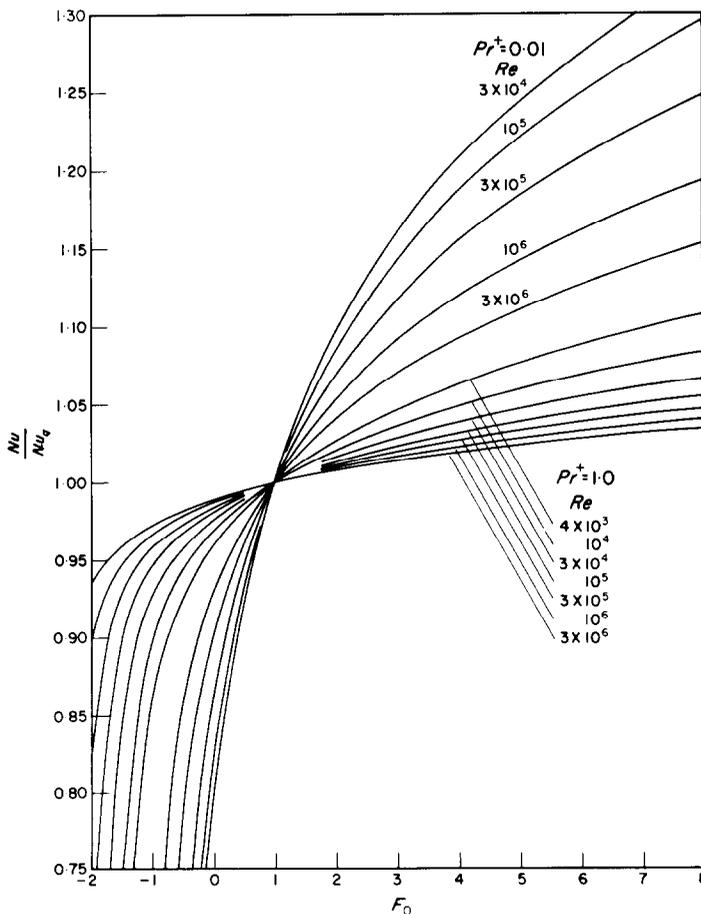


ABB. 10. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_q = f(F_0, Pr^+, Re)$ bei der turbulenten Rohrströmung für $Pr^+ = 0,01$ und $Pr^+ = 1,0$.

Tabelle 3. Auf die Nusselt-Zahl bei konstantem Wärmefluss Nu_q bezogene Nusselt-Zahl Nu sowie Mischungstemperatur θ_m in Abhängigkeit vom Parameter der Wärmeflussverteilung F_0 , von der Prandtl-Zahl Pr^+ und von der Reynolds-Zahl Re bei turbulenter Rohrströmung

Re	Pr^+	F_0	Nu/Nu_q	θ_m	Pr^+	F_0	Nu/Nu_q	θ_m
$4 \cdot 10^3$	0	8,00	1,330	0,661	0,1	8,00	1,247	0,719
$3 \cdot 10^4$			1,378	0,637			1,197	0,759
$3 \cdot 10^5$			1,398	0,626			1,127	0,817
$3 \cdot 10^6$			1,406	0,622			1,083	0,856
$4 \cdot 10^3$		0	0,790	0,493		0	0,858	0,571
$3 \cdot 10^4$			0,762	0,467			0,897	0,632
$3 \cdot 10^5$			0,749	0,457			0,942	0,725
$3 \cdot 10^6$			0,744	0,452			0,969	0,790
$4 \cdot 10^3$		-0,35	0,559	0,425		-0,45	0,657	0,496
$3 \cdot 10^4$		-0,35	0,487	0,397		-0,60	0,683	0,540
$3 \cdot 10^5$		-0,35	0,455	0,385		-0,85	0,795	0,643
$3 \cdot 10^6$		-0,35	0,438	0,379		-1,20	0,851	0,713
$4 \cdot 10^3$	0,01	8,00	1,318	0,669	1	8,00	1,110	0,843
$3 \cdot 10^4$			1,329	0,669			1,067	0,870
$3 \cdot 10^5$			1,248	0,729			1,047	0,891
$3 \cdot 10^6$			1,153	0,801			1,034	0,906
$4 \cdot 10^3$		4,00	1,202	0,633		4,00	1,064	0,824
$3 \cdot 10^4$			1,207	0,633			1,039	0,854
$3 \cdot 10^5$			1,155	0,698			1,027	0,877
$3 \cdot 10^6$			1,092	0,775			1,019	0,895
$4 \cdot 10^3$		2,00	1,094	0,597		2,00	1,027	0,807
$3 \cdot 10^4$			1,096	0,598			1,016	0,840
$3 \cdot 10^5$			1,070	0,667			1,011	0,866
$3 \cdot 10^6$			1,041	0,752			1,008	0,887
$4 \cdot 10^3$		0	0,801	0,502		0	0,957	0,773
$3 \cdot 10^4$			0,800	0,506			0,975	0,813
$3 \cdot 10^5$			0,866	0,592			0,984	0,847
$3 \cdot 10^6$			0,931	0,700			0,989	0,872
$4 \cdot 10^3$		-0,30	0,639	0,453		-0,60	0,916	0,749
$3 \cdot 10^4$		-0,30	0,644	0,459		-0,65	0,950	0,795
$3 \cdot 10^5$		-0,40	0,735	0,542		-0,70	0,968	0,834
$3 \cdot 10^6$		-0,50	0,861	0,665		-0,75	0,978	0,863
$4 \cdot 10^3$		-0,40	0,510	0,417		-1,15	0,807	0,688
$3 \cdot 10^4$		-0,40	0,526	0,427		-1,40	0,867	0,736
$3 \cdot 10^5$		-0,50	0,662	0,516		-1,80	0,862	0,749
$3 \cdot 10^6$		-0,75	0,778	0,624		-2,20	0,912	0,806
$4 \cdot 10^3$	0,03	8,00	1,297	0,683	10	8,00	1,033	0,944
$3 \cdot 10^4$			1,275	0,705			1,011	0,953
$3 \cdot 10^5$			1,185	0,773			1,008	0,956
$3 \cdot 10^6$			1,116	0,830			1,005	0,963
$4 \cdot 10^3$		0	0,817	0,521		0	0,993	0,933
$3 \cdot 10^4$			0,841	0,554			0,997	0,944
$3 \cdot 10^5$			0,908	0,657			0,998	0,948
$3 \cdot 10^6$			0,952	0,747			0,999	0,957
$4 \cdot 10^3$		-0,35	0,633	0,461		-4,40	0,930	0,908
$3 \cdot 10^4$		-0,35	0,699	0,504		-4,70	0,974	0,925
$3 \cdot 10^5$		-0,65	0,717	0,572		-4,85	0,983	0,932
$3 \cdot 10^6$		-1,00	0,776	0,647		-5,10	0,990	0,947

teten Fall abhängt: $A_T = 0,87 - A_{PS} = 0,94 - A_{PAS} = 0,58$. Trägt man die Funktion $f(Pr^+)/ (Pr^+ - A)$ über Pr^+ in doppeltlogarithmischen Koordinaten auf, so ergibt sich für den Bereich $Pr^+ = 0,7 \dots 1000$ eine Gerade mit der Neigung $-0,22$. Die gesuchte Funktion $f(Pr^+)$ lässt sich also durch die Gleichung $f(Pr^+) = B(Pr^+ - A)(Pr^+)^{-0,22}$ wiedergeben. Der Koeffizient B nimmt dabei für alle 3 Fälle T , PS und PAS den Wert 10 an. Stellt man die mit der Formel

$$Nu = \frac{RePr^+ \zeta/8}{1 + 10(Pr^+ - A)(Pr^+)^{-0,22} \sqrt{(\zeta/8)}} \quad (52)$$

(ζ nach Gleichung 47) berechneten Nusselt-Zahlen den genauen Werten gegenüber, so ergeben sich folgende mittleren quadratischen Abweichungen e in Prozent (die Zahlen in Klammern geben die maximalen Einzelabweichungen aller Wertepaare $Re > 4 \cdot 10^3$, $Pr^+ > 0,72$ an): $e_T = 0,9$ (1,9) – $e_{PS} = 1,4$ (3,3) – $e_{PAS} = 2,3$ (4,8). Diese gute Übereinstimmung zeigt, dass die Formel (45) die Wärmeübertragung ab mittleren Prandtl-Zahlen und für sämtliche Reynolds-Zahlen zuverlässig beschreibt.

Der Einfluss des Parameters der Wärme-flussverteilung F_0 auf die Nusselt-Zahl Nu ist in Abb. 10 aus der Darstellung der Verhältnis-werte Nu/Nu_q für die Prandtl-Zahlen $Pr^+ = 0,01$ und $Pr^+ = 1,0$ und für die verschiedenen Reynolds-Zahlen zu ersehen. Zahlenwerte der Funktion $Nu/Nu_q = f(F_0, Re, Pr^+)$ sind in Tabelle 3 für die Prandtl-Zahlen $0 - 0,01 - 0,03 - 0,1 - 1,0 - 10$ enthalten. Für $Pr^+ = 0,01$ ist die Abhängigkeit von F_0 bis zu Reynolds-Zahlen von $Re = 3 \cdot 10^5$ vergleichbar mit jener bei laminarer Strömung, wie der Vergleich mit Abb. 16 zeigt (für $Re = 3 \cdot 10^4$ ist z.B. Nu für $\vartheta_w = \text{konst.}$ gegenüber $q_w = \text{konst.}$ um 20 Prozent niedriger). Mit zunehmender Prandtl-Zahl geht der Einfluss von F_0 zurück, er ist jedoch selbst bei mittleren Prandtl-Zahlen noch nicht ganz abgeklungen.

Beim Vergleich der für kleine Prandtl-Zahlen berechneten Nusselt-Zahlen $Nu = f(Pr^+)$ mit

experimentell ermittelten Ergebnissen ergibt sich für grosse Péclet-Zahlen eine gute Übereinstimmung. Dagegen liegen im Bereich kleiner Péclet-Zahlen die in der vorliegenden Arbeit berechneten Nusselt-Zahlen an der oberen Grenze der durch das Experiment erhaltenen Werte. Letzteres hängt damit zusammen, dass bei kleinen Prandtl- und kleinen Reynolds-Zahlen der Quotient ϵ_h/ϵ_m Werte unterhalb 1 aufweist. Daneben gibt es jedoch auch eine Reihe von Messungen (z.B. von Kirillov *et al.* [17]), die über den gesamten Bereich der Péclet-Zahlen in guter Übereinstimmung mit analytisch gewonnenen Ergebnissen sind.

Für mittlere Prandtl-Zahlen sind die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment im allgemeinen am geringsten. Dies geht auch aus dem Vergleich mit den von Deissler *et al.* [14] an Luft und von Hufschmidt *et al.* [18] an Wasser gemessenen Nusselt-Zahlen hervor. Letztere sind in Abb. 11 wiedergegeben. Der Quotient $(Pr/Pr_w)^{0,11} - Pr$ ist die bei der Mischungstemperatur ϑ_m und Pr_w die bei der Wandtemperatur ϑ_w vorliegende Prandtl-Zahl—berücksichtigt dabei die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte, sein Wert hängt in erster Linie von der Höhe der Wärmestromdichte q_w an der Wand ab.

(d) Die thermische Einlauflänge.

Schliesst man die Kombinationen $Pr^+ > 100$, $Re < 2 \cdot 10^4$ aus, so lassen sich die Eigenschaften der Funktion $x_e/d = f(Re, Pr^+)$ nach numerischer Auswertung der Formel (44) folgendermassen zusammenfassen:

- Mit steigender Prandtl- und steigender Reynolds-Zahl nimmt die thermische Einlauflänge zu.
- Der Grad des Einflusses von Pr^+ und von Re auf x_e/d geht mit zunehmender Prandtl-Zahl zurück.
- Für $Pr^+ > 0,72$ gilt näherungsweise ($q_w = \text{konst.}$):

$$\frac{x_e}{d} = 5,2 \lg(Re) - 4,0. \quad (53)$$

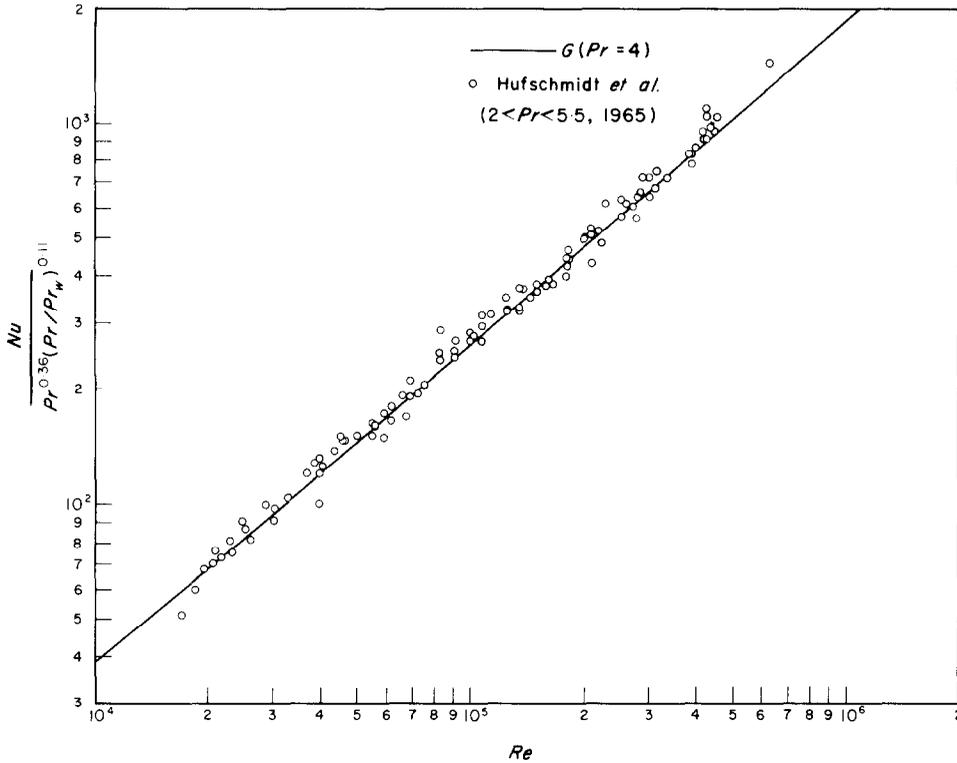


ABB. 11. Vergleich der für die turbulente Rohrströmung ($q_w = \text{konst.}$, $Pr = 4$) berechneten (G) und an Wasser von W. Hufschmidt *et al.* experimentell gemessenen Nusselt-Zahlen in der Darstellung $Nu Pr^{-0,36} (Pr/Pr_w)^{-0,11} = f(Re)$.

Dass ab mittleren Prandtl-Zahlen die thermische Einlaufänge von Pr^+ nahezu unabhängig wird, ist in Übereinstimmung sowohl mit theoretischen Untersuchungen von Levy [19] als auch mit an Wasser und Öl vorgenommenen Messungen von Hartnett [20]. Die leichte Zunahme der thermischen Einlaufänge x_e/d mit steigender Reynolds-Zahl deckt sich mit den analytisch gewonnenen Ergebnissen $Nu(x)/Nu = f(Re, Pr, x/d)$ von Berry [21] sowie mit den Messungen von Hartnett an Wasser und von Boelter *et al.* [22] an Luft, während sich für Öl bei den Messungen von Hartnett x_e/d mit zunehmender Reynolds-Zahl verringerte.

3.2 Parallele Platten, symmetrischer Wärmeaustausch

3.2.1 Laminare Strömung

Der Wärmeaustausch bei laminarer Strömung zwischen parallelen Platten ist der einzige Fall, in dem sich die Stelle $\partial\theta/\partial x = 0$ durch einen Wendepunkt im Temperaturprofil auszeichnet. In den beiden Abb. 12 und 13 ist diese Tatsache zu erkennen, besonders im Vergleich mit der laminaren Rohrströmung nach Abb. 4. Die Abhängigkeit der Nusselt-Zahl Nu vom Parameter F_0 ist aus der das Rohrbündel betreffenden Abb. 23 zu entnehmen: In der Näherung, die das Rohrbündel durch die innere Hälfte eines

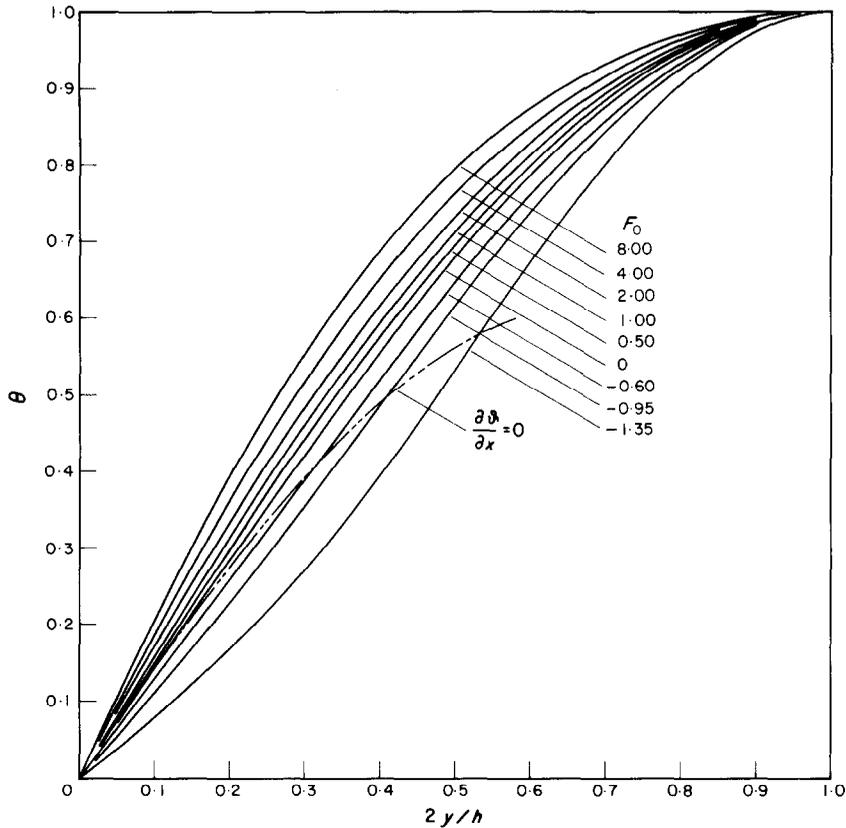


ABB. 12. Temperaturverlauf $\theta = f(2y/h, F_0)$ bei der laminaren Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch.

Ringspalts bei quasisymmetrischem Wärmeaustausch ($r_0 = r_c$) ersetzt, entspricht der Fall der parallelen Platten bei symmetrischem Wärmeaustausch nach Gleichung (81) dem unteren Grenzwert $p/d = 0,952$ ($r_0/r_1 = r_c/r_1 = 1$).

3.2.2 Turbulente Strömung

3.2.2.1 Formeln für strömungsmechanische Größen. Experimentelle Untersuchungen haben gezeigt, dass die Geschwindigkeitsprofile in rechteckigen Kanälen mit grossem Seitenverhältnis nur unwesentlich von denjenigen im Rohr abweichen. Es gelten daher bei parallelen Platten die in Abschnitt 3.1.2.1 zusammengestellten Beziehungen mit Ausnahme folgender Abweichungen:

Die äquivalente Rohr-Reynolds-Zahl lautet:

$$Re_T = \frac{1}{2} \frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{mPP}} Re_{PP} \tag{54}$$

wobei φ_{mT} und φ_{mPP} die für Re_T berechneten Mittelwerte der Geschwindigkeit für das Rohr bzw. für die parallelen Platten bedeuten. Daraus erhält man für den Widerstandskoeffizienten:

$$\frac{\zeta_{PP}}{\zeta_T^+} = \left(\frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{mPP}} \right)^2 \left[\frac{\lg(Re_{PP}/7)}{\lg(Re_T/7)} \right]^2 \tag{55}$$

Mit $\zeta_T^+ = \zeta_T(Re_{PP})$ ist dabei derjenige Widerstandskoeffizient bezeichnet, der sich für die Platten-Reynolds-Zahl $Re_{PP} = 2u_m h/\nu$ aus dem Widerstandsgesetz des Rohres Gleichung (47)

ergibt. Die hier beschriebenen Beziehungen werden in Abschnitt 3.4.2.1 für den allgemeinen Fall des Ringspaltes hergeleitet, der die parallelen Platten, gekennzeichnet durch $r_1/r_2 = r_c/r_2 = 1$, mit einschliesst. Die numerische Auswertung der Gleichung (55) ergibt $\zeta_{PP} \cong \zeta_T^+$, in Übereinstimmung mit dem Experiment (s. Abb. 17, $r_1/r_2 = 1$). Für die äquivalenten Rohr-Reynoldszahlen $Re_T = 4 \cdot 10^3, 3 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^5$ und $3 \cdot 10^6$ erhält man die in Tabelle 4 angegebenen Reynoldszahlen $Re = Re_{PP}$.

3.2.2.2 *Ergebnisse für den Wärmeübergang.* Die für die parallelen Platten bei symmetrischem Wärmeaustausch erhaltenen numerischen Ergebnisse sind in den Tabellen 1, 2 und 4 auszugswise wiedergegeben: Die Koeffizienten a und c des logarithmischen Temperaturgesetzes

in Tabelle 1, die Mischungstemperatur θ_m für $q_w = \text{konst.}$ in Tabelle 2 sowie die Verhältniszahlen Nu/Nu_q und die Mischungstemperatur θ_m für $q_w \neq \text{konst.}$ in Tabelle 4. Für kleine Prandtl-Zahlen lässt sich Nu aus Gleichung (51b) berechnen, für mittlere bis grosse Prandtl-Zahlen folgt Nu aus Gleichung (52) mit $A = 0,94$. Die thermische Einlauflänge x_e kann ab mittleren Prandtl-Zahlen—mit Ausnahme der Kombinationen $Pr^+ > 100, Re < 4 \cdot 10^4$ —näherungsweise mit Hilfe der Gleichung $x_e/d_h = 3,3 \lg(Re)$ —3,4 berechnet werden.

Die Übereinstimmung der für $Pr^+ = 0,72$ berechneten Nusselt-Zahlen mit Messungen, die von Novotny *et al.* [23] in 3 von Luft ($q_w = \text{konst.}$) durchströmten Rechteckkanälen mit den Seitenverhältnissen $b/h = 1 - 5 - 10$

Tabelle 4. Auf die Nusselt-Zahl bei konstantem Wärmefluss Nu_q bezogene Nusselt-Zahl Nu sowie Mischungstemperatur θ_m in Abhängigkeit vom Parameter der Wärmeflussverteilung F_0 , von der Prandtl-Zahl Re bei turbulenter Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer (PS) bzw. asymmetrischer Wärmeaustausch (PAS)

Pr^+	Re	PS			PAS				
		F_0	Nu/Nu_q	θ_m	F_0	Nu/Nu_q	θ_m		
0,01	$8,66 \cdot 10^3$	8,00	1,298	0,787	8,00	1,316	0,769		
	$6,21 \cdot 10^4$		1,307	0,785		1,320	0,768		
	$6,08 \cdot 10^5$		1,224	0,824		1,246	0,798		
	$6,00 \cdot 10^6$		1,134	0,869		1,160	0,838		
	$8,66 \cdot 10^3$	0	0,880	0,703	0	0,867	0,676		
	$6,21 \cdot 10^4$		0,878	0,702		0,866	0,675		
	$6,08 \cdot 10^5$		0,917	0,755		0,898	0,712		
	$6,00 \cdot 10^6$		0,956	0,820		0,937	0,767		
	$8,66 \cdot 10^3$	-1,10	0,452	0,613	-0,95	0,481	0,592		
	$6,21 \cdot 10^4$		-1,05	0,516		0,626	-0,95	0,479	0,593
	$6,08 \cdot 10^5$		-1,30	0,569		0,669	-0,90	0,670	0,653
	$6,00 \cdot 10^6$		-1,75	0,675		0,734	-1,20	0,706	0,691
	0,03	$8,66 \cdot 10^3$	8,00	1,276	0,796	8,00	1,298	0,776	
		$6,21 \cdot 10^4$		1,253	0,808		1,275	0,786	
		$6,08 \cdot 10^5$		1,167	0,852		1,195	0,822	
		$6,00 \cdot 10^6$		1,100	0,888		1,127	0,856	
$8,66 \cdot 10^3$		0	0,890	0,715	0	0,874	0,684		
$6,21 \cdot 10^4$			0,902	0,733		0,885	0,696		
$6,08 \cdot 10^5$			0,942	0,796		0,922	0,745		
$6,00 \cdot 10^6$			0,968	0,849		0,952	0,794		
$8,66 \cdot 10^3$		-1,10	0,529	0,635	-0,95	0,520	0,604		
$6,21 \cdot 10^4$			-1,15	0,582		0,658	-1,00	0,517	0,608
$6,08 \cdot 10^5$			-1,50	0,679		0,721	-1,15	0,620	0,654
$6,00 \cdot 10^6$			-2,05	0,733		0,768	-1,40	0,712	0,705

durchgeführt wurden, ist gut (der Einfluss des Seitenverhältnisses b/h auf die Nusselt-Zahl in [23] ist gering). Dasselbe gilt für die von Brundrett *et al.* [24] in einem ebenfalls von Luft durchströmten Kanal von quadratischem Querschnitt bei allseitiger Beheizung ($q_w = \text{konst.}$) vorgenommenen Temperaturmessungen.

3.3 Parallele Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch

3.3.1 Laminare Strömung

Der Temperaturverlauf θ ist in Abb. 13 für verschiedene Werte F_0 wiedergegeben. Der Einfluss der Grösse F_0 auf θ_m und Nu/Nu_q folgt aus den beiden Abb. 15 und 16: Bei asymmetrischem Wärmeaustausch stellt die

Strömung zwischen parallelen Platten den speziellen Fall $r_1/r_2 = 1$, $q_w = q_{w1}$ des allgemeinen Falls eines Ringspalts mit einseitigem Wärmeaustausch dar.

Bei einseitigem Wärmeübergang ist der hydraulische Durchmesser wieder wie beim Rohr gleich dem doppelten Abstand, den die Stelle $\partial\theta/\partial y = 0$ von der wärmetauschenden Wand trennt. Die Nusselt-Zahl ist hier grösser als der entsprechend durch 2 dividierte Wert bei symmetrischem Wärmeaustausch. Dieses Verhalten lässt sich vorhersehen, da im vorliegenden Fall die Durchsatzverteilung bezüglich des Temperaturverlaufs günstiger ist: Das Geschwindigkeitsmaximum liegt näher zu dem Gebiet, in dem sich das Temperaturprofil

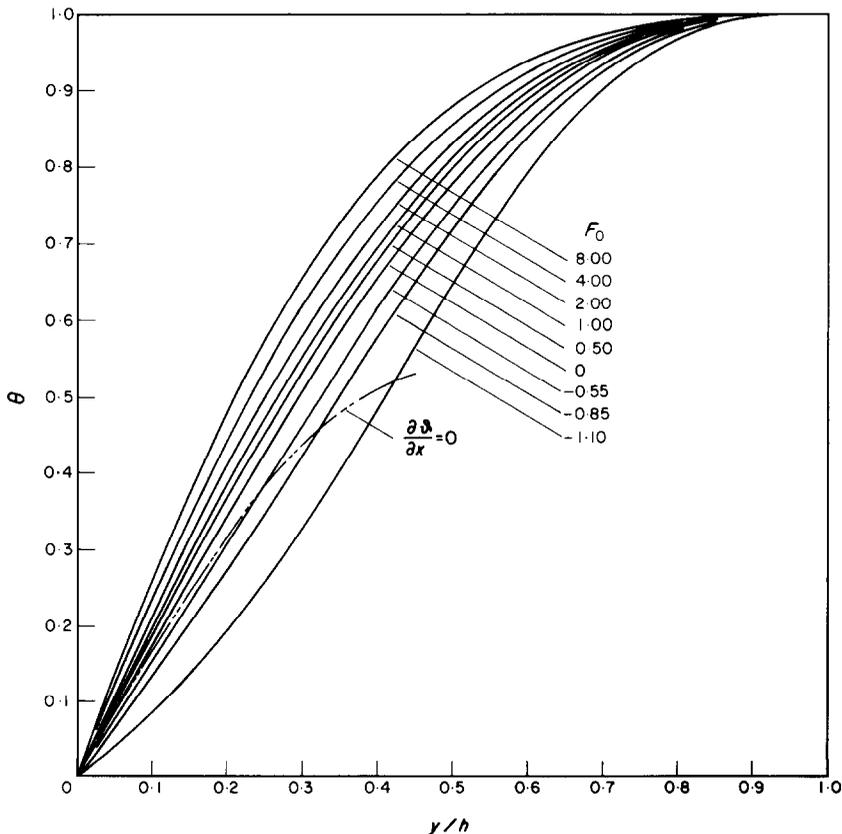


ABB. 13. Temperaturverlauf $\theta = f(y/h, F_0)$ bei der laminaren Strömung zwischen parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch.

aufbaut, während in dem einflussloseren Bereich $\partial\vartheta/\partial y \rightarrow 0$ auch $\varphi \rightarrow 0$ geht.

An dieser Stelle sei ein interessanter, auch bei turbulenter Strömung für $Pr = 0$ und alle Reynolds-Zahlen gültiger Zusammenhang beschrieben, der den asymmetrischen Wärmeaustausch bei parallelen Platten gegenüber allen anderen Wärmeübergangsbedingungen auszeichnet: Die Nusselt-Zahl Nu_0 ist bei konstantem Wärmefluss für jedes symmetrische Geschwindigkeitsprofil $Nu_0 = 4$.

Um diesen Wert zu bestimmen, ist es dabei nicht notwendig, auf den detaillierten Rechnungsgang einzugehen, wie im folgenden gezeigt wird: Aus der Wärmebilanz für die Schicht dy : $\rho c_p u dy \partial\vartheta/\partial x = -\partial q/\partial y$ folgt, dass $\partial q/\partial y$ durch die Symmetrie des Geschwindigkeitsprofils u ebenfalls symmetrisch zu $y = h/2$ ist, da der axiale Temperaturgradient $\partial\vartheta/\partial x$ für $q_w = \text{konst.}$ nicht vom Wandabstand abhängt. Diese Tatsache hat zur Folge, dass q/q_w S-förmig um die Gerade $q/q_w = y^+$ verläuft, wobei Rotationssymmetrie um den Punkt $y^+ = 0,5$, $q/q_w = 0,5$ besteht. Die Form des Geschwindigkeitsprofils bestimmt lediglich die Amplitude dieses S-Verlaufs, während das Integral $\int_0^1 (q/q_w) dy^+$ stets gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ist, das in der Darstellung $q/q_w = f(y^+)$ durch die Geraden $y^+ = y_w^+$, $q/q_w = 0$ und $q/q_w = y^+$ gebildet wird. Diese Fläche hat die Grösse 0,5 und mit $d_h/r_w = 2$ erhält man aus Gleichung (17) das obengenannte Ergebnis. Damit ist auch der Temperaturgradient an der Wand $(d\theta/dy^+)_w$ unabhängig von den Strömungsverhältnissen, und der Einfluss der Reynolds-Zahl bei turbulenter Strömung ($Pr = 0$) kommt nur im Temperaturprofil innerhalb des Strömungsquerschnitts und damit verbunden in der Grösse der Mischungstemperatur θ_m zum Ausdruck.

3.3.2 Turbulente Strömung

Die Koeffizienten a und c des logarithmischen Temperatursesetzes, die Mischungstemperatur θ_m für $q_w = \text{konst.}$ sowie die Nusselt-Zahl

Nu/Nu_q und die Mischungstemperatur θ_m für $q_w \neq \text{konst.}$ sind in den Tabellen 1, 2 und 4 enthalten. Für den Bereich kleiner Prandtl-Zahlen folgt Nu aus Gleichung (51c), ab mittleren Prandtl-Zahlen gilt Gleichung (52) mit $A = 0,58$. Die thermische Einlaufänge x_e lässt sich näherungsweise aus $x_e/d_h = 12,4 \lg(Re) - 14,4$ bestimmen.

Die formale Anwendung des logarithmischen Temperatursesetzes führt im Vergleich zum Rohr und zu den parallelen Platten bei symmetrischem Wärmeaustausch zu grösseren Abweichungen, wie zu erwarten war (s. Einleitung des Abschnitts 3). Das Entsprechende gilt auch für die Wiedergabe der Nusselt-Zahlen durch eine Gleichung der Form (45). Für kleine Prandtl-Zahlen stellt auch die Beziehung $Nu = f(Pr)$ eine etwas grobere Näherung im Vergleich zu den Fällen T und PS dar.

Ab mittleren Prandtl-Zahlen geht der Einfluss des Strömungsquerschnitts und der thermischen Randbedingung auf die Wärmeübertragung mehr und mehr zurück. Der Grund hierfür wird im folgenden am Beispiel der drei Fälle T , PS und PAS erläutert.

Geht man in Gleichung (17) vom Wandabstand y^+ auf η über, so ergibt sich:

$$Nu = - \frac{(d_h/r_w)(d\eta/dy^+)}{\theta_m \int_0^{\eta_0} \frac{q/q_w}{1 + Pr^+ \epsilon_m/\nu} d\eta} \quad (56)$$

Mit $y_T^+ = 1 - \eta/\eta_{cT}$, $y_{PS}^+ = 1 - \eta/\eta_{cPS}$ und $y_{PAS}^+ = 1 - 0,5 \eta/\eta_{cPAS}$ erhält man unter Berücksichtigung von $\eta_{cPS} = \eta_{cPAS} = 0,5 \eta_{cT}$ für den Zähler in Gleichung (56) für alle drei Fälle T , PS und PAS den Wert $2\eta_{cT}$. Im Nenner dieser Gleichung unterscheiden sich zwar die oberen Integrationsgrenzen teilweise um den Faktor 2 ($\eta_{OT} = \eta_{cT}$, $\eta_{OPS} = \eta_{cPS} = 0,5 \eta_{cT}$, $\eta_{OPAS} = 2 \eta_{cPAS} = \eta_{cT}$), da sich jedoch bei hohen Prandtl-Zahlen der Wert des Integrals ab verhältnismässig kleinen Wandabständen η nicht mehr wesentlich ändert, bleibt dieser Einfluss gering [im wichtigen wandnahen Bereich gilt $q/q_w \cong 1$

und $\varepsilon_m/v = f(\eta)$]. Zieht man noch in Betracht, dass auch die Mischungstemperaturen θ_m nur geringe gegenseitige Unterschiede aufweisen, so ergibt sich für grosse Prandtl-Zahlen bei einheitlichen Wertepaaren $Re, Pr^+ : Nu_T \cong Nu_{PS} \cong Nu_{PAS}$. Dieses Ergebnis zeigt auch, dass ab mittleren Werten Pr der äquivalente hydraulische Durchmesser $d_h = 4S/U$ dem äquivalenten thermischen Durchmesser $d_t = 4S/U_w$ als charakteristische Länge vorzuziehen ist.

Beim Vergleich mit Messungen ergeben die für $Pr^+ = Pr = 0,01$ und $q_w = \text{konst.}$ berechneten Nusselt-Zahlen eine gute Übereinstimmung mit den von Treffethen *et al.* [25] in einem von Quecksilber durchströmten Ringspalt ($r_1/r_2 = 0,714 - q_{w1} = \text{konst.}$) ermittelten Zusammenhang $Nu = f(Re)$. Der Vergleich mit dem Fall PAS ist zulässig, da sich bei Werten r_1/r_2 nahe 1 die Ergebnisse des Ringspalts nur wenig von denen der parallelen Platten unterscheiden: Für sämtliche Prandtl- und Reynolds-Zahlen sind bei dem genannten Radienverhältnis die Nusselt-Zahlen für den Fall A1 gegenüber dem Fall PAS nur um ungefähr 5 Prozent höher.

Messungen in einem von Luft durchströmten Rechteckkanal mit dem Seitenverhältnis $b/h = 5$ bei asymmetrischer Heizung ($q_w = \text{konst.}$) wurden von Sparrow *et al.* [26] durchgeführt. Dabei wurden sowohl der Fall untersucht, dass nur eine der beiden Wände (Breite b) beheizt war ($q_{w1} = \text{konst.} - q_{w2} = 0$), als auch jener, dass beide Wände Wärme im Verhältnis $q_{w1}/q_{w2} = 1/2$ abgaben. Die gemessenen Nusselt-Zahlen des erstgenannten Falls stimmen gut mit den in der vorliegenden Arbeit für $Pr^+ = 0,72$ berechneten überein.

3.4 Der Ringspalt

3.4.1 Laminare Strömung

3.4.1.1 Exakte Berechnung für $q_w = \text{konst.}$
 In den folgenden Ausführungen wird der besseren Übersichtlichkeit wegen auf die allgemeine Darstellung mit dem unbestimmten Index i verzichtet und die Berechnungen für den speziellen und bedeutend wichtigeren Fall durchgeführt, dass der Wärmeübergang am

inneren Zylinder 1 stattfindet und der äussere Zylinder 2 wärmeisoliert ist. Die Gleichungen sind jedoch so aufgebaut, dass bei Wärmeaustausch am äusseren Zylinder 2 lediglich die Indices 1 und 2 zu vertauschen sind. In Absatz (b) ist dann noch der Fall behandelt, dass beide Wände am Wärmeaustausch beteiligt sind.

(a) Der einseitige Wärmeaustausch.

Aus Gleichung (39) folgt nach Einsetzen der Geschwindigkeitsverteilung

$$\varphi\left(\frac{r_1}{r_c}, y_1^+\right) = \frac{\ln y_1^{+2} - \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 (y_1^{+2} - 1)}{\ln \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 1} \quad (57)$$

für den Wärmestromdichteverlauf:

$$\frac{q}{q_{w1}} = y_1^{+2} \left[\ln y_1^{+2} - \frac{(r_1/r_c)^2 (y_1^{+2}/2 - 1) - 1}{y_1^+ [(r_1/r_c)^2/2 + n_1 - 1]} + n_1 \right] \quad (58)$$

wobei die Grösse n_1 den in Gleichung (63a) angegebenen Ausdruck ersetzt. Den Radius r_c am Ort des Geschwindigkeitsmaximums—im weiteren Verlauf als "neutraler Radius" bezeichnet—erhält man aus der Beziehung

$$\frac{r_c}{r_2} = \sqrt{\left[\frac{1 - (r_1/r_2)^2}{\ln (r_2/r_1)^2} \right]}. \quad (59)$$

Damit lässt sich die Temperaturverteilung θ aus Gleichung (11) berechnen zu:

$$\theta_1 = \frac{1}{n_2} \left\{ \frac{3}{4} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 2 - y_1^{+2} \left[\ln y_1^{+2} - \frac{1}{4} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 y_1^{+2} + \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 2 \right] - n_1 \ln y_1^{+2} \right\}. \quad (60)$$

Die Mischungstemperatur θ_m ergibt sich aus Gleichung (13):

$$\theta_{m1} = \frac{n_4}{n_2 n_3 [1 - (r_2/r_1)^2]}. \quad (61)$$

Mit $d_h/r_w = -2(r_2/r_1 - 1)$ folgt mit Hilfe der Gleichungen (17), (60) und (61):

$$Nu_1 = 4 \frac{n_3}{n_4} \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_c} \right)^2 - n_1 \right]. \quad (62)$$

Die in den Gleichungen (58), (60), (61) und (62) enthaltenen Grössen lauten:

$$n_1 = \left(\frac{r_2}{r_c} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left[\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] \quad (63a)$$

$$n_2 = \frac{3}{4} \left(\frac{r_1}{r_c} \right)^2 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{r_2}{r_c} \right)^2 \right] + n_1 \left[1 - \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right] - 2 \quad (63b)$$

$$n_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_c} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{r_c} \right)^2 - 1 \quad (63c)$$

$$n_4 = \frac{5}{4} + \frac{11}{4} \left(\frac{r_2}{r_c} \right)^2 - \frac{19}{18} \left(\frac{r_1}{r_c} \right)^2 + \frac{29}{36} \left(\frac{r_2}{r_c} \right)^2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^4 - \left(\frac{r_2}{r_c} \right)^4 \left[\frac{7}{8} + \frac{1}{16} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^4 - \frac{5}{12} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right] \\ + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - \frac{5}{2} \left(\frac{r_2}{r_c} \right)^2 - 2 \right] + \left(\frac{r_1}{r_c} \right)^4 \left[\frac{11}{48} - \frac{3}{4} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right] \\ + \left(\frac{r_2}{r_c} \right)^2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left[2 \left(\frac{r_c}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - \frac{3}{4} \right] + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^4 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - \frac{5}{12} \left(\frac{r_2}{r_c} \right)^2 - \frac{3}{2} \right] \\ + n_1 \left\{ \frac{3}{4} \left(\frac{r_1}{r_c} \right)^2 - \left(\frac{r_2}{r_c} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{r_2}{r_c} \right)^2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right. \\ \left. \left[\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{r_1}{r_c} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{r_c} \right)^2 - 2 \right] \right\}. \quad (63d)$$

An dieser Stelle sei noch auf eine Besonderheit des ringförmigen Querschnitts bei Wärmeübertragung an der Innenwand 1 hingewiesen. Betrachtet man die 3 Strömungsformen:

laminare Strömung (Index l)

turbulente Strömung, $Pr = 0$ (Index tm)

Rechteckprofil $u = \text{konst.}$ (Index s)

so erhält man für alle Strömungsquerschnitte mit symmetrischem Geschwindigkeitsverlauf $Nu_s > Nu_{tm} > Nu_l$ in Übereinstimmung mit der Reihenfolge der Völligkeit der φ -Profile, charakterisiert durch $(\varphi_m)_s = 1 > (\varphi_m)_{tm} > (\varphi_m)_l$. Im vorliegenden Fall des Ringspaltes dagegen

kann sich die Reihenfolge für Nu —trotz der unverändert gültigen Reihenfolge für φ_m —umkehren, da mit abnehmendem Radienverhältnis r_1/r_2 die Durchsatzverteilung zunehmend in das wandnahe Gebiet verlagert wird. Dieser Vorgang wirkt sich bei laminarer Strömung stärker aus als bei der vorwiegend von wandnahen Vorgängen beherrschten turbulenten Strömung, während das Rechteckprofil defini-

tionsgemäss ganz unbeeinflusst bleibt. Nach Berechnungen von Dwyer [27] erfolgt diese Umkehr der Reihenfolge für Nu ab Werten $r_1/r_2 < \frac{1}{4}$.

(b) Der beidseitige Wärmeaustausch.*

Erfolgt der Wärmeaustausch gleichzeitig an beiden Begrenzungswänden des Ringspaltes, so ist in den vorangegangenen Gleichungen für den Wärmestromdichte- und Temperaturverlauf der Radius r_2 durch r_0 und im Bereich

* Ein Verfahren unter Anwendung der Superposition haben Kays und Leung [30] angegeben.

$r_0 \leq r \leq r_2$ anschliessend zusätzlich r_1 durch r_2 sowie y_1^+ durch y_2^+ zu ersetzen. Die durch dieselben Substitutionen gewonnenen Mischungstemperaturen θ_{m10} und θ_{m20} gelten dann jeweils von der betreffenden Wand bis zur Stelle r_0 . Dementsprechend tritt in Gleichung (13) an Stelle der mittleren Geschwindigkeit φ_{m12} die mittlere Geschwindigkeit φ_{m10} , die von der Wand ($r = r_1$) bis zum Radius r_0 gilt. Dies hat zur Folge, dass die Grösse n_3 nach Gleichung (63c) durch n'_3 zu ersetzen ist:

$$n'_3 = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 1 + \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 - 1 - \ln \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right] \right\}}{\left[1 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right]} \quad (63e)$$

Die Berechnung des Halbmessers r_0 an der Stelle $\partial\vartheta/\partial y = 0$ erfolgt aus einer Wärmebilanz. Beispiele hierfür sind in den beiden Arbeiten von Dwyer [28, 29] durchgeführt, wobei dort die Berechnung von Temperaturverlauf, Mischungstemperatur und Nusselt-Zahl durch numerische und nicht, wie in der vorliegenden Arbeit, durch analytische Auswertung der Integralgleichungen beschrieben wird.

3.4.1.2 Ergebnisse für den Wärmeübergang bei $q_w \neq \text{konst.}$ Der Einfluss des Parameters F_0

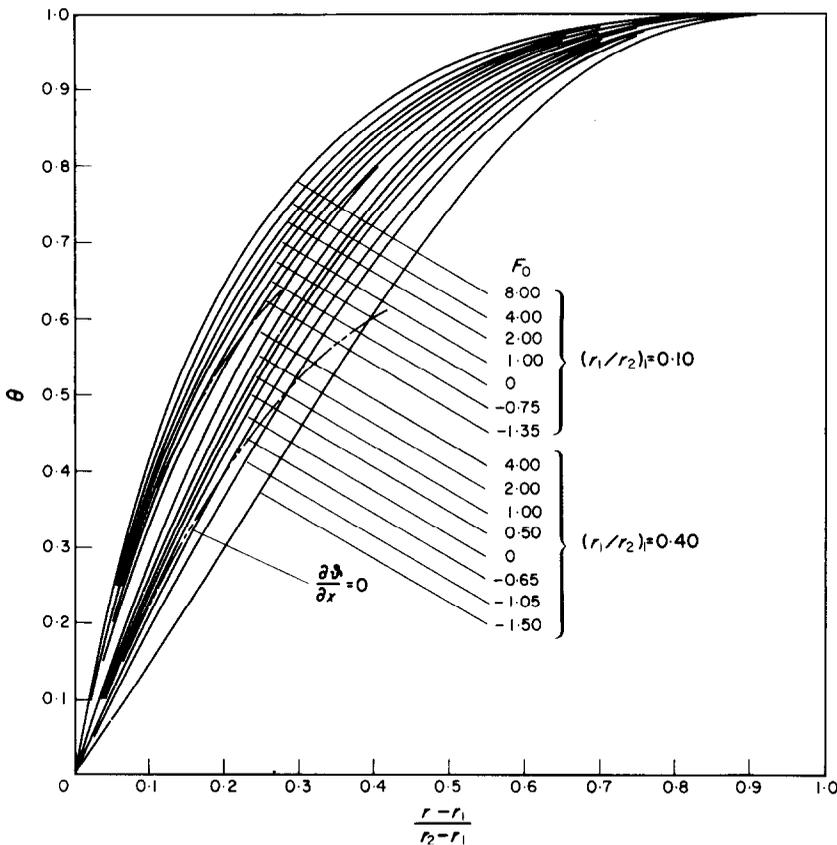


ABB. 14. Temperaturverlauf $\theta = f[(r - r_1)/(r_2 - r_1), F_0]$ bei laminarer Strömung im Ringspalt, Wärmeaustausch am inneren Zylinder, für $r_1/r_2 = 0,40$ und $r_1/r_2 = 0,10$.

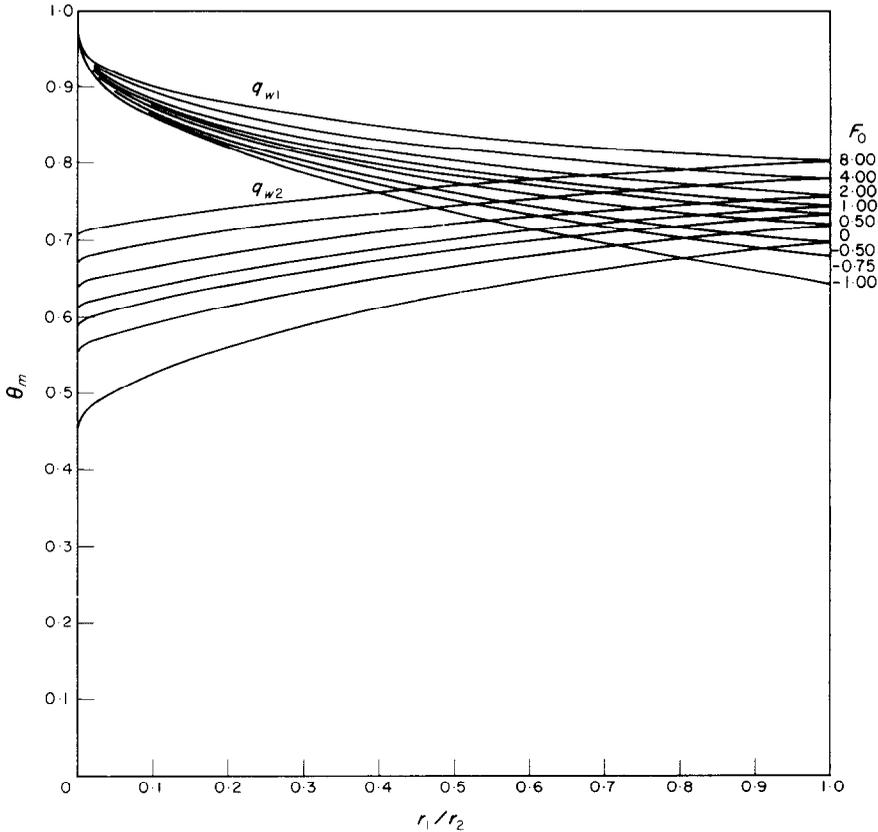


ABB. 15. Mischungstemperatur $\theta_m = f(r_1/r_2, F_0)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt für Wärmeaustausch am inneren (q_{w1}) bzw. äusseren Zylinder (q_{w2}).

auf die einzelnen Grössen geht aus folgenden Abbildungen hervor: Für die Temperaturverteilung $\theta[(r - r_1)/(r_2 - r), F_0 = \text{konst.}]$ bei den beiden Radienverhältnissen $r_1/r_2 = 0,40$ und $r_1/r_2 = 0,10$ und Wärmeaustausch am inneren Zylinder aus der Abb. 14, für die Mischungstemperatur $\theta_m(r_1/r_2, F_0 = \text{konst.})$ aus Abb. 15 und für das Verhältnis Nu/Nu_q der Nusselt-Zahlen aus Abb. 16.

In der inneren Ringspalthälfte strebt mit $r_1/r_2 \rightarrow 0$ das Geschwindigkeitsprofil der Rechteckform zu. Der damit verbundene Geschwindigkeitsgradient $(d\varphi/dy)_w \rightarrow \infty$ führt zu $(d\theta/dy)_w \rightarrow \infty$, $\theta_m = 1$, $Nu \rightarrow \infty$ und $x_e = 0$.

3.4.2 Turbulente Strömung

3.4.2.1 Formeln für strömungsmechanische Grössen. Über die Strömung im Ringspalt gibt

es noch keine zuverlässigen Angaben, die den Einfluss des Halbmesserverhältnisses r_1/r_2 und der Reynolds-Zahl Re_{12} auf den Verlauf der Impulsaustauschgrösse ε_m/ν und der Geschwindigkeit φ sowie auf den Radius verschwindender Schubspannung r_c beschreiben. Dies gilt insbesondere für kleine Werte r_1/r_2 , bei denen die Abweichungen gegenüber der Strömung zwischen parallelen Platten erst deutlich werden. Von Rotfus *et al.* [8] wurde eine Geschwindigkeitsverteilung angegeben, die durch Modifikation der wandnormalen Koordinate dem bei Rohren gültigen Gesetz gehorcht. Als Grundlagen der Herleitung dienen die Annahmen, dass eine für alle Werte r_1/r_2 gültige Funktion $\varepsilon_m/\nu = f(u)$ existiert und dass weiterhin der Radius r_c bei turbulenter Strömung gleich demjenigen bei laminarer Strömung ist.

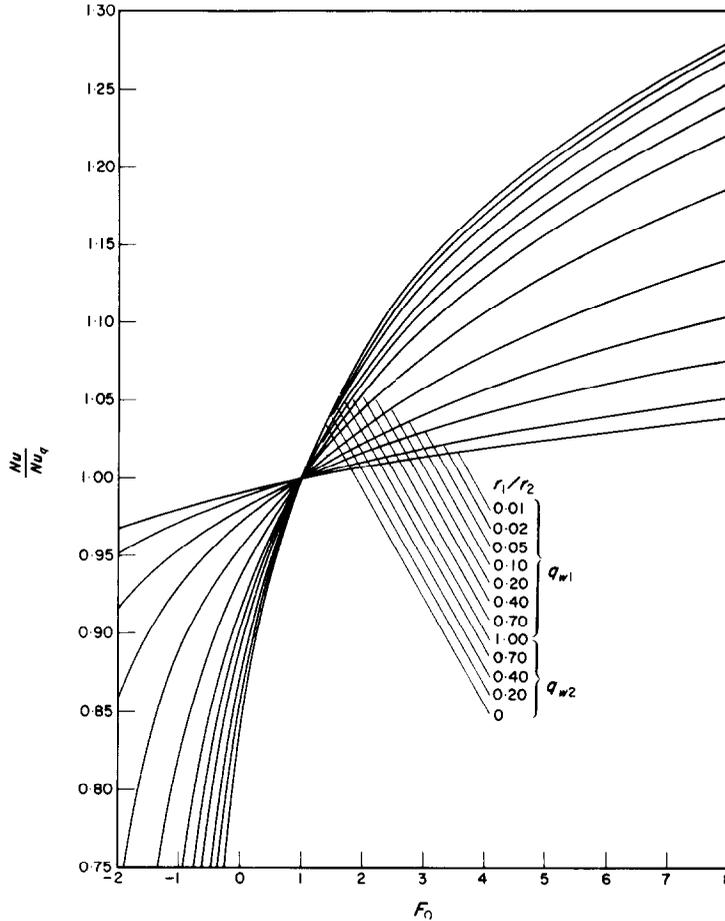


ABB. 16. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_q = f(F_0, r_1/r_2)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt, einschliesslich der Grenzfälle $r_1/r_2 = 0$: Rohr und $r_1/r_2 = 1$: Parallele Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch.

Eine andere Darstellung der lokalen Geschwindigkeit im Ringspalt stammt von Bailey [9]. Dabei wird in dem Prandtlischen Wandgesetz $(u_c - u)/u^+ = -2,5 \ln(2y/d)$ der Wandabstand $2y/d$ durch $1 - \tau_i/\tau_{wi}$ ersetzt.*

(a) Die Impulsaustauschgrösse ϵ_m/ν und der Widerstandskoeffizient ζ .

Das Verfahren, welches in der vorliegenden

* Eine neuerdings erschienene Arbeit über die Berechnung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung und der Wandreibung in Ringspalten, die in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment ist, stammt von Eifler [41].

Arbeit angewandt wird, unterscheidet sich von den beiden zuvor beschriebenen grundsätzlich: Ausgehend von einem Ansatz über den Verlauf der Austauschgrösse für Impuls ϵ_m/ν wird mit Hilfe der bekannten Schubspannungsverteilung das Geschwindigkeitsfeld berechnet.* Diese Reihenfolge ist insbesondere bei Wärmeübergangsberechnungen vorzuziehen, da hier die richtige Wiedergabe der ϵ_m/ν -Verteilung gegenüber derjenigen für φ von wesentlich grösserer

* Dieser Weg wurde auch im analytischen Teil der Arbeit von Kays und Leung [30] beschritten.

Bedeutung ist. Die Berechnung der Impulsaustauschgrösse aus Ansätzen über die Geschwindigkeitsverteilung ist meist riskant, da letztere besonders in grösserem Wandabstand sehr unempfindlich gegenüber ε_m/v sind.

Der Berechnung von ε_m/v werden folgende Annahmen zugrundegelegt (vgl. Abschnitt 2.1): Das Wandgesetz Gleichung (1) wird für die wandnahen Zonen sowohl des Innen- als auch des Aussenzylinders unverändert übernommen. Diese Annahme scheint auf Grund der Herleitung dieses Gesetzes gerechtfertigt, wengleich auch wegen des dem Rohr und den parallelen Platten gegenüber steileren Abfalls der Schubspannung an der inneren Wand die zugrundegelegte Vereinfachung $\tau/\tau_w \cong 1$ stärker ins Gewicht fällt. Das Mittengesetz (2) soll für die äussere Ringspalthälfte ebenfalls unverändert Gültigkeit haben, mit der Begründung, dass die Abweichungen der τ_2/τ_{w2} -Verteilung vom linearen Verlauf bei Rohr und parallelen Platten relativ gering sind. Bis zum Gültigkeitsbereich des Wandgesetzes in der inneren Ringspalthälfte erfolgt nun eine Anpassung in der Art, dass das Mittengesetz (2) in diesem Abschnitt mit einem Proportionalitätsfaktor $1/f_1$ multipliziert wird, der durch die Bedingung $(\varepsilon_m/v)_1 = (\varepsilon_m/v)_2$ an der Stelle $r = r_c$ definiert ist: Aus den Definitionsgleichungen für η_{c1} und η_{c2} : $\eta_{c1} = u_1^+(r_c - r_1)/v$ und $\eta_{c2} = u_2^+(r_2 - r_c)/v$, wobei $u_i^+ = \sqrt{(\tau_{wi}/\rho)}$ bedeutet, folgt:

$$f_1 = \frac{\eta_{c1}}{\eta_{c2}} = \frac{r_c/r_2 - r_1/r_2}{1 - r_c/r_2} \sqrt{\left\{ \frac{(r_c/r_2)^2 - (r_1/r_2)^2}{(r_1/r_2) [1 - (r_c/r_2)^2]} \right\}}. \quad (64)$$

Das Mittengesetz (2) geht damit über in

$$\left(\frac{\varepsilon_m}{v\eta_c} \right)_i = \frac{\kappa}{3\eta_{ci}/\eta_{c2}} (0,5 + z_i^{+2}) (1 - z_i^{+2}). \quad (65)$$

Das eben beschriebene Verfahren: ausgehend von den am ehesten überschaubaren Verhältnissen in der äusseren Ringspalthälfte auf die innere Ringspalthälfte zu schliessen, wird nun

auch auf die Bestimmung einer charakteristischen Reynolds-Zahl sowie des Widerstandskoeffizienten angewandt. Neben dem den gesamten Ringspaltquerschnitt erfassenden Widerstandskoeffizienten ζ_{12} wird dabei noch zwischen zwei weiteren, den beiden Ringspalthälften zugeordneten Widerstandskoeffizienten ζ_1 und ζ_2 unterschieden. Die Definitionsgleichungen für ζ_1 , ζ_2 und ζ_{12} lauten:

$$\Delta p = \zeta_1 \frac{\rho}{2} u_{m1}^2 \frac{lr_1}{2(r_c^2 - r_1^2)} \quad (66a)$$

$$= \zeta_2 \frac{\rho}{2} u_{m2}^2 \frac{lr_2}{2(r_2^2 - r_c^2)} \quad (66b)$$

$$= \zeta_{12} \frac{\rho}{2} u_{m12}^2 \frac{1}{2(r_2 - r_1)}. \quad (66c)$$

In den Gleichungen (66a) und (66b) sind für die Abschnitte 1 und 2 hydraulische Durchmesser $d_{hi} = 4 S_i/U_i$ eingeführt, wobei S_i den Strömungsquerschnitt zwischen r_i und r_c und $U_i = 2\pi r_i$ den Umfang der betreffenden Wand bedeuten. Mit Hilfe der Beziehung $\tau_{wi} = |r_c^2 - r_i^2| \Delta p / (2lr_i)$ ergibt sich $u_i^+ = u_{mi} \sqrt{(\zeta_i/8)}$. Damit lassen sich die Definitionsgleichungen für η_{ci} überführen in $\eta_{ci} = \sqrt{(\zeta_i/32)} Re_i r_i / (r_c + r_i)$, wobei die Reynolds-Zahlen in den beiden Ringspalthälften mit dem entsprechenden hydraulischen Durchmesser d_{hi} gebildet sind, also: $Re_1 = 2u_{m1}(r_c^2 - r_1^2)/(vr_1)$ und $Re_2 = 2u_{m2}(r_2^2 - r_c^2)/(vr_2)$.

Zur Bestimmung der Widerstandskoeffizienten ζ_i wird nun von einer Näherung Gebrauch gemacht. Diese besteht darin, dass in der äusseren Ringspalthälfte 2 das durch die festgelegte Verteilung der Impulsaustauschgrösse ε_m/v und dem tatsächlich vorhandenen Schubspannungsverlauf (s. Gleichung 70) eindeutig festgelegte Geschwindigkeitsprofil (Gleichung 72 a, b, c) durch dasjenige ersetzt wird, welches aus dem näherungsweise gültigen Verlauf $\tau/\tau_{w2} \cong z_2^+$ hervorgeht. In anderen Worten: Die Geschwindigkeitsprofile zweier Strömungen derselben Flüssigkeit in einem Rohr des Durchmessers d und in der äusseren Ringspalthälfte der Ab-

messung $r_2 - r_c = d/2$ sind unter der Bedingung $\tau_{w2} = \tau_{wT}$ näherungsweise gleich (vgl. [8]). Daraus folgt: $u_2^+ = u_T^+$, $\eta_{c2} = \eta_{cT}$, $Re_2 = (1 + r_c/r_2)(\varphi_{m2}/\varphi_{mT})Re_T$ und $\zeta_2 = (\varphi_{mT}/\varphi_{m2})^2 \zeta_T$.

Die in diesen und den nun folgenden Gleichungen enthaltenen Grössen sind von Re_T als charakteristischer Reynolds-Zahl abhängig, weshalb hierfür die Bezeichnung "äquivalente Rohr-Reynolds-Zahl" eingeführt werden soll. Diese lässt sich für eine vorgegebene und in der üblichen Weise definierten Reynolds-Zahl $Re_{12} = u_{m12} d_h/\nu = 2u_{m12}(r_2 - r_1)/\nu$ berechnen zu:

$$Re_T = \frac{1 - r_c/r_2}{1 - r_1/r_2} \frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{m12}} Re_{12}. \quad (67)$$

Der mit Hilfe der Gleichungen (66b) und (66c) gewonnene Zusammenhang

$$\zeta_{12} = \frac{1 - r_1/r_2}{1 - (r_c/r_2)^2} \left(\frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{m12}} \right)^2 \zeta_T \quad (68)$$

gestattet, den im Ringspalt zu erwartenden Widerstandskoeffizienten aus dem Widerstandsgesetz des Rohres $\zeta_T(Re_T)$ zu bestimmen. Wird mit $\zeta_T^+ = \zeta_T(Re_{12})$ derjenige Widerstandskoeffizient bezeichnet, den man durch formales Einsetzen der Ringspalt-Reynolds-Zahl Re_{12} in das Rohrwiderstandsgesetz erhält, so folgt aus den Gleichungen (47) und (68):

$$\frac{\zeta_{12}}{\zeta_T^+} = \frac{1 - (r_1/r_2)}{1 - (r_c/r_2)^2} \left(\frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{m12}} \right)^2 \left[\frac{\log(Re_{12}/7)}{\log(Re_T/7)} \right]^2 \quad (69)$$

Für die ebenen Platten erhält man mit $r_1/r_2 = r_c/r_2 = 1$ die bereits in Abschnitt 3.2.2.1 beschriebenen Vereinfachungen.

(b) Die Geschwindigkeitsverteilung u/u^+ .

Aus der vorgegebenen Schubspannungsverteilung

$$\frac{\tau_i}{\tau_{wi}} = \frac{1}{1 + r_c/r_i} \left(1 + \frac{1}{1 + (r_i/r_c - 1) z_i^+} \right) z_i^+ \quad (70)$$

und der durch die Ansätze (1) und (65) fest-

gelegten Verteilung der Impulsaustauschgrösse ε_m/ν lässt sich das Geschwindigkeitsfeld durch Integration der Gleichung

$$\frac{d(u/u^+)}{dz^+} = - \frac{\tau/\tau_w}{(1 + \varepsilon_m/\nu)/\eta_c} \quad (71)$$

berechnen. Der dabei zunächst noch unbekanntes Radius r_c , der die Stelle des Geschwindigkeitsmaximums angibt, wird aus der Bedingung $u_{c1} = u_{c2}$ ermittelt.

Im Gültigkeitsbereich des Wandgesetzes für die Impulsaustauschgrösse, das vereinbarungsgemäss bis zum Schnittpunkt mit dem Mittengesetz gelten soll, ist es ratsam, für die innere Ringspalthälfte folgende Unterteilung vorzunehmen: Bis zum Wandabstand $\eta_1 = 15$ wird, wie üblich, mit konstanter Schubspannung $\tau = \tau_w$ gerechnet. Im Bereich $15 < \eta_1 < \eta_{s1}$ ist diese Näherung jedoch infolge des insbesondere bei kleinen Werten r_1/r_2 stark ausgeprägten Abfalls der Schubspannung bereits in Wandnähe nicht mehr zulässig, zumal auch die Wandabstände η_{s1} am Schnittpunkt der Kurven des ε_m/ν -Wand- und Mittengesetzes gegenüber dem Fall des Rohres höhere Werte annehmen. Um eine einfache Integration der Gleichung (71) nach Einsetzen des τ_1/τ_{w1} -Verlaufs (70) zu ermöglichen, wird die ε_m/ν -Verteilung gem. Gleichung (1) durch ihre Asymptote $(\varepsilon_m/\nu)_i = \kappa(\eta_i - 9,53)$ ersetzt.

(b.a) $\eta_1 < 15$ (oder $\eta_2 < \eta_{s2}$ für die äussere Ringspalthälfte)

Für die Quadratur der Gleichung (71) gibt Reichardt [7] nach Einsetzen des von Gleichung (1) nur unwesentlich abweichenden Wandgesetzes $\varepsilon_m/\nu = \kappa[\eta - \eta_n \operatorname{tgh}(\eta/\eta_n)]$ die Näherungslösung

$$\frac{u}{u^+} = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa\eta) + c_1 \left(1 - e^{-\eta/\eta_n} - \frac{\eta}{\eta_n} e^{-b_1\eta} \right) \quad (72a)$$

mit den in Abschnitt 3.1.2.1 aufgeführten Konstanten an.

(b.b) $15 \leq \eta_1 \leq \eta_{s1}$

Aus den Gleichungen (70), (71) und $(\varepsilon_m/\nu)_1 = \varkappa(\eta_1 - 9,53)$ folgt:

$$\left(\frac{u - u_a}{u^+}\right)_1 = \frac{1}{\varkappa(1 + r_c/r_1)(ab - 1)} \times \left[a(ab - 2) \ln \frac{a - z_1^+}{a - z_a^+} + \frac{1}{b} \ln \frac{1 - bz_1^+}{1 - bz_a^+} + (ab - 1)(z_1^+ - z_a^+) \right] \quad (72b)$$

mit den Abkürzungen: $a = 1 + (1/\varkappa - 9,53)/\eta_{c1}$, $b = 1 - r_1/r_c$ und $z_a^+ = 1 - \eta_a/\eta_{c1}$. Die Geschwindigkeit u_a/u^+ erhält man aus Gleichung (72a) mit $\eta_a = 15$ zu $u_a/u^+ = 10,59$.

(b.c) Im Gültigkeitsbereich des Mittengesetzes (65) kann die molekulare Zähigkeit gegenüber der turbulenten Scheinreibung vernachlässigt werden. Durch Einsetzen der Gleichungen (65) und (70) in Gleichung (71) folgt nach Integration* in den Grenzen $0 \dots z_i^+$ und $u_{ci}/u^+ \dots u_i/u^+$:

$$\left(\frac{u - u_c}{u^+}\right)_i = \frac{\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa} \left\{ \ln(1 - z_i^+) + \ln \frac{1 + z_i^+}{1 + 2z_i^{+2}} + a_{1i} \ln(1 + z_i^+) + a_{2i} \ln(1 + 2z_i^{+2}) + a_{3i} \times \ln \left[1 - \left(1 - \frac{r_i}{r_c}\right) z_i^+ \right] + a_{4i} \operatorname{arctg} [(\sqrt{2}) z_i^+] \right\} \quad (72c)$$

wobei die beiden ersten Glieder in der geschweiften Klammer dem linearen Anteil der Schubspannungsverteilung, also mit $\eta_{ci}/\eta_{c2} = 1$ dem Rohr bzw. den parallelen Platten entsprechen.

Die Koeffizienten a_{ji} lauten:

$$a_{1i} = - \frac{2(1 - r_i/r_c)}{(2 - r_i/r_c)(1 + r_i/r_c)}$$

$$a_{2i} = \frac{(1 - r_i/r_c)(3 - r_i/r_c)}{(2 - r_i/r_c)[2 + (1 - r_i/r_c)^2]}$$

* Inzwischen wurde auch eine von Levy durchgeführte Integration dieser Gleichung bekannt [31].

$$a_{3i} = - \frac{6(1 - r_i/r_c)^2}{(2 - r_i/r_c)(1 + r_i/r_c)[2 + (1 - r_i/r_c)^2]}$$

$$a_{4i} = \frac{2(\sqrt{2})(1 - r_i/r_c)r_i/r_c}{(1 + r_i/r_c)[2 + (1 - r_i/r_c)^2]}$$

(b.d) Für nicht zu kleine Werte des Radienverhältnisses r_1/r_2 kann die von Reichardt [7] für das Rohr und für parallele Platten hergeleitete Geschwindigkeitsverteilung des Gesamtquerschnitts auf den Ringspalt erweitert werden.

Definiert man eine Zusatzgeschwindigkeit u_z/u^+ in der Weise, dass diese an der Wand ($x_i^+ = 1$) null wird:

$$\left(\frac{u_z}{u^+}\right)_i = \frac{\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa} \left\{ \ln \frac{1,5(1 + z_i^+)}{1 + 2z_i^{+2}} + a_{1i} \ln \frac{1 + z_i^+}{2} + a_{2i} \ln \frac{1 + 2z_i^{+2}}{3} + a_{3i} \ln \frac{1 - (1 - r_i/r_c)z_i^+}{r_i/r_c} + a_{4i} [\operatorname{arctg}\{(\sqrt{2})x_i^+\} - \operatorname{arctg}(\sqrt{2})] \right\} \quad (73)$$

und damit in Ringspaltmitte den Wert

$$\left(\frac{u_{zc}}{u^+}\right)_i = \frac{\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa} [(1 - a_{2i}) \ln 3 - (1 + a_{1i}) \times \ln 2 - a_{3i} \ln(r_i/r_c) - a_{4i} \operatorname{arctg}(\sqrt{2})] \quad (74)$$

annimmt, so folgt unter Beachtung von $1 - x_i^+ = \eta_i/\eta_{ci}$

$$\left(\frac{u}{u^+}\right)_i - \frac{\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa} \ln \eta_i - \left(\frac{u_z}{u^+}\right)_i = \left(\frac{u_c}{u^+}\right)_i - \frac{\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa} \ln \eta_{ci} - \left(\frac{u_{zc}}{u^+}\right)_i = \text{konst.} \quad (75)$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass für $\eta_{ci}/\eta_{c2} \cong 1$ die Geschwindigkeitsdifferenz $(u - u_z)_i/u_i^+$ dem aus dem Wandgesetz folgenden logarithmischen Gesetz $[(u - u_z)/u^+]_i = 1/\varkappa \ln \eta_i + c_2$ gehorcht. Die Bedingung $\eta_{ci}/\eta_{c2} \cong 1$ ist in der äusseren Ringspalthälfte vereinbarungsgemäss immer, in der inneren dagegen

nur bei Halbmesserverhältnissen nahe eins erfüllt. In diesen Fällen können das Mittengesetz (72c) und das Wandgesetz (72a) kombiniert werden, indem in letzterem anstelle von u/u^+ die Geschwindigkeitsdifferenz $(u - u_z)_i/u_i^+$ eingesetzt wird. Dies ist zulässig, da im wandnahen Gebiet, dem Gültigkeitsbereich des Wandgesetzes also, die Zusatzgeschwindigkeit u_z klein gegenüber u ist ($u_{zw} = 0$). Die Gleichung für den Geschwindigkeitsverlauf über den gesamten Querschnitt einer Ringspalthälfte lautet demnach:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{u^+}\right)_i &= \frac{1}{\kappa} \left\{ \ln(1 + \kappa\eta) + \ln \frac{1,5(1 + z_i^{+2})}{1 + 2z_i^{+2}} \right. \\ &+ a_{1i} \ln \frac{1 + z_i^+}{2} + a_{2i} \ln \frac{1 + 2z_i^{+2}}{3} \\ &+ a_{3i} \ln \frac{1 - (1 - r_i/r_c) z_i^+}{r_i/r_c} \\ &\left. + a_{4i} [\arctg\{(\sqrt{2}) z_i^+\} - \arctg(\sqrt{2})] \right\} \end{aligned}$$

$$+ c_1 \left(1 - e^{-\eta/\eta_n} - \frac{\eta}{\eta_n} e^{-b_i\eta} \right). \quad (76)$$

Die mit den Koeffizienten a_{ji} behafteten Glieder dieser Gleichung, die für $r_1/r_2 = 1$ sämtlich null sind, geben die Abweichungen gegenüber dem von Reichardt für das Rohr bzw. für parallele Platten aufgestellten Geschwindigkeitsgesetz (46) an.

(c) Der Radius r_c

Nach Kenntnis des Geschwindigkeitsverlaufs in den beiden Ringspalthälften lässt sich nun die Stelle mit verschwindender Schubspannung, also maximaler Geschwindigkeit, berechnen. Die Bestimmungsgleichung für r_c/r_2 ($r_1/r_2, Re_T$) ergibt sich aus der Bedingung $u_{c1} = u_{c2}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_{zc}}{u^+}\right)_2 + \frac{1}{\kappa} \ln \eta_{c2} + c_2 \\ = \left(\frac{u_a}{u^+} + \frac{u_s - u_a}{u^+} - \frac{u_s - u_c}{u^+}\right)_1 \frac{u_1^+}{u_2^+} \quad (77) \end{aligned}$$

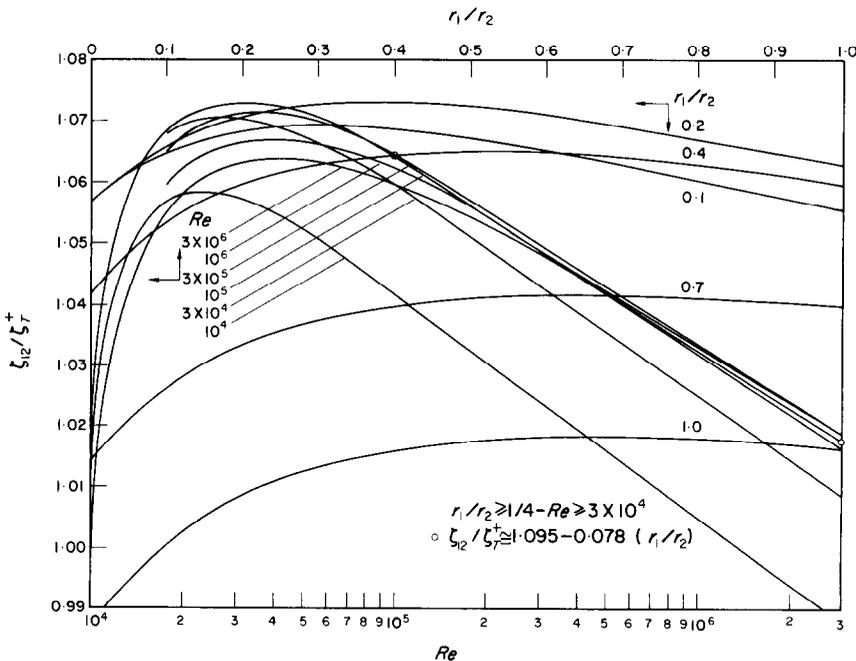


ABB. 17. Verhältnis der Widerstandsbeiwerte $\zeta_{12}/\zeta_T^+ = f(Re, r_1/r_2)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt.

wobei, ausser den bereits bekannten Grössen, $(u_s - u_a)/u^+$ und $(u_s - u_c)/u^+$ die Zahlenwerte der Gleichungen (72b) bzw. (72c) für den Mittenabstand $z_{s1}^+ = 1 - \eta_{s1}/\eta_{c1}$ bedeuten.

3.4.2.2 Ergebnisse für strömungsmechanische Grössen.

(a) Der Widerstandskoeffizient.

Die nach Gleichung (69) berechneten Verhältniswerte ζ_{12}/ζ_T^+ sind in Abb. 17 in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl (Abszissenskala unten, $r_1/r_2 = \text{konst.}$) bzw. in Abhängigkeit vom Radienverhältnis r_1/r_2 (Abszissenskala oben, $Re = \text{konst.}$) dargestellt. Der Quotient ζ_{12}/ζ_T^+ bleibt für den gesamten Bereich der Radienverhältnisse $r_1/r_2 = 0 \dots 1$ unterhalb des Wertes 1,08. Für $r_1/r_2 > \frac{1}{4}$ und $Re > 3 \cdot 10^4$ betragen die Abweichungen gegenüber der Näherung $\zeta_{12}/\zeta_T^+ = 1,095 - 0,078(r_1/r_2)$ weniger als 1 Prozent.

Messungen von Brighton *et al.* [10] ergaben für 3 von Wasser durchströmte Ringspalte ($r_1/r_2 = 0,118 - 0,200 - 0,400$) für den Bereich niedriger Reynolds-Zahlen ($Re < 17000$) Werte ζ_{12}/ζ_T^+ zwischen 1,06 und 1,08 und für 4 von Luft durchströmte Ringspalte ($r_1/r_2 = 0,562 - 0,375 - 0,125 - 0,0625$) bei $Re = 30000 \dots 327000$ Werte zwischen 1,00 und 1,10. Aus den Messungen von Rothfus *et al.* [32] wurden diese Quotienten für $r_1/r_2 = 0,650$ und $Re =$

10000...15000 zu 1,05 und für $r_1/r_2 = 0,162$ und $Re = 4000 \dots 20000$ zu 1,12 bestimmt. Die Ergebnisse dieser experimentellen Untersuchungen sind also in Übereinstimmung mit der Theorie. Wesentlich höhere Widerstandskoeffizienten ergaben dagegen Messungen von Presser *et al.* [33] in 3 von Stickstoff und Kohlendioxyd durchströmten Ringspalten: $\zeta_{12}/\zeta_T^+ = 1,10 - 1,20 - 1,32$ für $r_1/r_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}$.

(b) Die Geschwindigkeitsverteilung.

In Abb. 18 ist im Abschnitt $r_1 < r < r_c$ für das Radienverhältnis $r_1/r_2 = 0,40$ die mit der Gleichung (76) berechnete Geschwindigkeitsverteilung $\varphi = f[(r - r_1)/(r_2 - r_1)]$, $Re = \text{konst.}$ dargestellt. Die Unterschiede der mit den Gleichungen (72a, b, c) einerseits und mit Gleichung (76) andererseits für die innere Ringspalthälfte berechneten Geschwindigkeitsprofile φ sind für $r_1/r_2 = 0,125$ und $r_1/r_2 = 0,0625$ aus derselben Abbildung zu entnehmen. Dabei sind zum Vergleich auch die von Brighton *et al.* [10] an Luft gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen eingezeichnet. Die Übereinstimmung der mit (76) berechneten Geschwindigkeitsprofile φ ist gegenüber (72a, b, c) etwas besser. Im Gegensatz hierzu kommen in der Form $u/u^+ = f(\eta)$, die mit Gleichung (72a,

Tabelle 5. Koeffizienten a und c des bei turbulenter Strömung für $\eta > 30$ näherungsweise gültigen logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes $u/u^+ = a \ln \eta + c$, angewandt auf die innere Hälfte von Ringspalten ($r_1 \leq r \leq r_c$, $r_1/r_2 = 0,7 - 0,4 - 0,2 - 0,1$) und auf Rohrbündel (Dreieckanordnung, $p/d = 1,25 - 1,60 - 1,95 - 3,50$); a_r und c_r in Abhängigkeit von der äquivalenten Rohr-Reynolds-Zahl Re_T , a und c dagegen Mittelwerte für den Bereich $Re_T = 10^4 \dots 3 \cdot 10^6$ [zugrundegelegte Geschwindigkeitsverteilung gemäss Gleichung (72a, b, c), Werte in Klammern gemäss Gleichung (76)]

Re_T		r_1/r_2				p/d			
		0,7	0,4	0,2	0,1	1,25	1,60	1,95	3,50
10^4	a_r	2,76 (2,66)	2,13 (2,18)	1,45 (1,63)	0,87 (1,10)	2,66	2,25	1,97	1,16
	c_r	3,86 (4,51)	5,72 (5,60)	7,39 (6,65)	8,67 (7,69)	4,40	6,18	7,31	10,4
10^5	a_r	2,55 (2,57)	2,14 (2,29)	1,66 (1,91)	1,23 (1,52)	2,50	2,26	2,06	1,52
	c_r	4,07 (3,91)	5,41 (4,41)	6,97 (5,26)	8,27 (6,34)	4,58	5,83	6,89	9,61
10^6	a_r	2,43 (2,45)	2,16 (2,26)	1,86 (2,01)	1,58 (1,75)	2,43	2,29	2,18	1,88
	c_r	4,55 (4,38)	5,41 (4,52)	6,39 (4,98)	7,32 (5,75)	4,96	5,80	6,48	8,25
$10^4 -$	a	2,39 (2,39)	2,17 (2,22)	1,94 (2,02)	1,78 (1,86)	2,40	2,29	2,21	1,99
$3 \cdot 10^6$	c	5,03 (4,98)	5,38 (4,86)	5,53 (4,78)	5,33 (4,62)	5,23	5,79	6,21	7,08

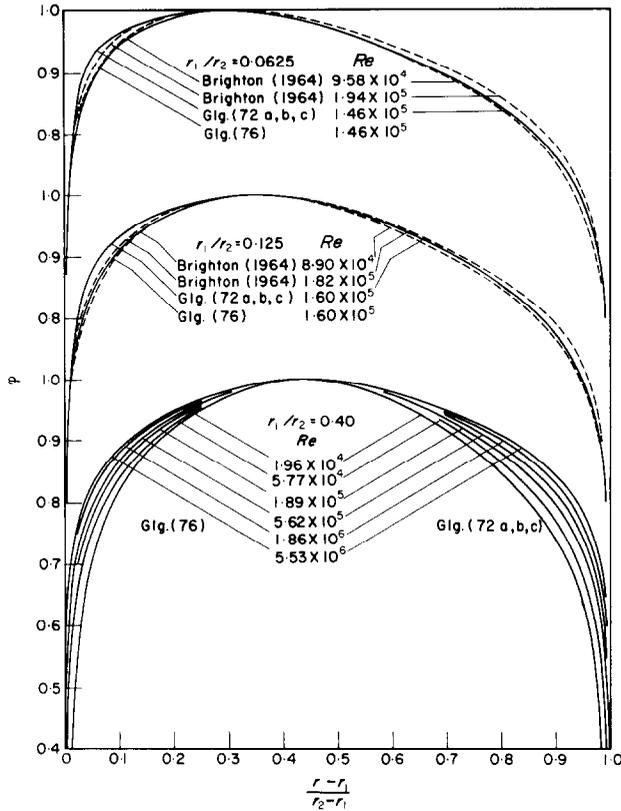


ABB. 18. Vergleich der für die turbulente Strömung im Ringspalt mit Hilfe der Gleichungen (72a, b, c) bzw. (76) berechneten und an Luft von Brighton *et al.* [10] experimentell ermittelten Geschwindigkeitsverteilungen $\varphi = f[(r - r_1)/(r_2 - r_1), Re, r_1/r_2]$.

b, c) ermittelten Geschwindigkeiten den gemessenen Werten näher. Die Messpunkte $u/u^+ = f(\eta)$ nach [10] liegen im Vergleich zur Theorie etwas höher. Sehr gut wird dagegen der Einfluss der Reynolds-Zahl wiedergegeben: Beim Radienverhältnis $r_1/r_2 = 0,562$ nimmt u/u^+ mit steigendem Re leicht ab, während beim kleineren Radienverhältnis $r_1/r_2 = 0,0625$ u/u^+ mit steigendem Re zunimmt. Beiden Werten r_1/r_2 gemeinsam ist die Tatsache, dass der Einfluss der Reynolds-Zahl auf $u/u^+ = f(\eta)$ mit zunehmendem Re zurückgeht.

An der unteren Grenze der Gültigkeit des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes, d.h.

bei $\eta \cong 30$, ist auch der Einfluss des Radienverhältnisses r_1/r_2 auf u/u^+ nur noch gering. Diese Tatsache wurde von Roberts [31] und von Kays *et al.* [30] dazu verwandt, die von r_1/r_2 abhängigen Koeffizienten a und c der Beziehung $u/u^+ = a \ln \eta + c$ zu bestimmen. Die in der vorliegenden Arbeit aus den Wertegruppen u/u^+ , η , Re , r_1/r_2 nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate ermittelten Koeffizienten a und c sind in Tabelle 5 aufgeführt.

(c) Der neutrale Radius.

Der aus Gleichung (77) durch Iteration bestimmte Wert des neutralen Radius r_c ist

in Tabelle 6 in Abhängigkeit von r_1/r_2 und von Re_T angegeben (in dieser Tabelle sind auch die aus Gleichung (67) berechnete Reynolds-Zahl Re_{12} sowie die mittlere Geschwindigkeit φ_m enthalten). Der Einfluss der Reynolds-Zahl wird erst bei Annäherung an sehr kleine Radienverhältnisse r_1/r_2 spürbar, und zwar in dem Sinn, dass der Quotient r_c/r_2 mit steigendem Re kleiner wird. Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit den von Brighton *et al.* [10] an Luft in Ringspalten mit den Radienverhältnissen $r_1/r_2 = 0,562 - 0,375 - 0,125 - 0,0625$ durchgeführten Messungen. Für $r_1/r_2 = 0,0625$ ergaben sich beispielsweise Messwerte von $r_c/r_2 = 0,339$ ($Re = 95800$) und $r_c/r_2 = 0,332$ ($Re = 327000$). Durch Interpolation der in Tabelle 6 enthaltenen Werte erhält man für $r_1/r_2 = 0,0625$ folgende Ergebnisse: $r_c/r_2 = 0,336$ ($Re = 95800$) und $r_c/r_2 = 0,329$ ($Re = 327000$). Die Absolutwerte aus Theorie und Experiment unterscheiden sich also nur um 1 Prozent, der relative Unterschied für die genannten Reynolds-Zahlen beträgt in beiden

Untersuchungen 2 Prozent. Bei der laminaren Strömung ergibt sich $r_c/r_2 = 0,424$, ein Wert also, der im Vergleich zur turbulenten Strömung um etwa 25 Prozent höher liegt.

Von Kays *et al.* [30] wurde unter Verwendung von Versuchsergebnissen mehrerer Autoren empirisch eine Gleichung für r_c/r_2 aufgestellt. In der doppeltlogarithmischen Darstellung von $(r_c - r_1)/(r_2 - r_1) = f(r_1/r_2)$ liessen sich die Messergebnisse näherungsweise durch eine Gerade mit der Neigung $n_K = 0,343$ wiedergeben. Die Gültigkeit dieser Näherung wird durch die Theorie bekräftigt. Die für 13 Radienverhältnisse im Bereich $r_1/r_2 = 0,7 \dots 0,03$ und bei jeweils 7 Reynolds-Zahlen im Bereich $Re_T = 4 \cdot 10^3 \dots 3 \cdot 10^6$ ermittelten Wertepaare r_c/r_2 , r_1/r_2 ergaben nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate eine mittlere Neigung von $n = 0,3336$ bei einer mittleren quadratischen Abweichung von 3,0 Prozent. Die Stelle des Geschwindigkeitsmaximums lässt sich also mit ausreichender Genauigkeit aus folgender Gleichung berechnen:

Tabelle 6. Reynolds-Zahl Re_{12} , neutraler Radius r_c/r_2 und mittlere Geschwindigkeit φ_m in Abhängigkeit von der äquivalenten Rohr-Reynolds-Zahl Re_T und vom Radienverhältnis r_1/r_2 bei turbulenter Strömung im Ringspalt

Re_T	r_1/r_2	0,70	0,40	0,20	0,10	0,05	0,03
$4 \cdot 10^3$	Re_{12}	$8,66 \cdot 10^3$	$8,05 \cdot 10^3$	$7,30 \cdot 10^3$	$6,58 \cdot 10^3$	$5,93 \cdot 10^3$	$5,51 \cdot 10^3$
	r_c/r_2	0,8433	0,6648	0,5139	0,4047	0,3170	0,2609
	φ_m	0,8330	0,8284	0,8171	0,8019	0,7856	0,7743
10^4	Re_{12}	$2,11 \cdot 10^4$	$1,96 \cdot 10^4$	$1,78 \cdot 10^4$	$1,62 \cdot 10^4$	$1,47 \cdot 10^4$	$1,38 \cdot 10^4$
	r_c/r_2	0,8432	0,6642	0,5128	0,4045	0,3197	0,2670
	φ_m	0,8586	0,8550	0,8450	0,8321	0,8188	0,8099
$3 \cdot 10^4$	Re_{12}	$6,22 \cdot 10^4$	$5,77 \cdot 10^4$	$5,24 \cdot 10^4$	$4,75 \cdot 10^4$	$4,33 \cdot 10^4$	$4,09 \cdot 10^4$
	r_c/r_2	0,8430	0,6631	0,5101	0,4001	0,3154	0,2642
	φ_m	0,8793	0,8762	0,8673	0,8557	0,8438	0,8361
10^5	Re_{12}	$2,04 \cdot 10^5$	$1,89 \cdot 10^5$	$1,72 \cdot 10^5$	$1,55 \cdot 10^5$	$1,42 \cdot 10^5$	$1,34 \cdot 10^5$
	r_c/r_2	0,8428	0,6619	0,5067	0,3942	0,3077	0,2563
	φ_m	0,8948	0,8921	0,8839	0,8731	0,8623	0,8553
$3 \cdot 10^5$	Re_{12}	$6,08 \cdot 10^5$	$5,62 \cdot 10^5$	$5,08 \cdot 10^5$	$4,59 \cdot 10^5$	$4,19 \cdot 10^5$	$3,95 \cdot 10^5$
	r_c/r_2	0,8427	0,6609	0,5036	0,3889	0,3007	0,2487
	φ_m	0,9053	0,9028	0,8951	0,8849	0,8747	0,8681
10^6	Re_{12}	$2,01 \cdot 10^6$	$1,86 \cdot 10^6$	$1,67 \cdot 10^6$	$1,51 \cdot 10^6$	$1,38 \cdot 10^6$	$1,30 \cdot 10^6$
	r_c/r_2	0,8425	0,6597	0,5004	0,3835	0,2939	0,2413
	φ_m	0,9143	0,9120	0,9047	0,8950	0,8853	0,8792
$3 \cdot 10^6$	Re_{12}	$6,00 \cdot 10^6$	$5,53 \cdot 10^6$	$4,97 \cdot 10^6$	$4,48 \cdot 10^6$	$4,09 \cdot 10^6$	$3,86 \cdot 10^6$
	r_c/r_2	0,8424	0,6587	0,4976	0,3791	0,2855	0,2356
	φ_m	0,9210	0,9189	0,9118	0,9026	0,8935	0,8877

$$\frac{r_c}{r_2} = \frac{r_1/r_2 + (r_1/r_2)^{\frac{1}{2}}}{1 + (r_1/r_2)^{\frac{1}{2}}} \quad (78)$$

Vergleich zum Rohr zu grösseren Ungenauigkeiten. Werte der Mischungstemperatur θ_m sind in Tabelle 7 für $q_w = \text{konst.}$ und in Tabelle 8 für $q_w \neq \text{konst.}$ zusammengestellt.

3.4.2.3 Ergebnisse für den Wärmeaustausch.

(a) Die Temperaturverteilung.

In Tabelle 1 sind die Koeffizienten a und $c(Pr^+)$ der Beziehung (48) aufgeführt. Die Anwendung des hier nur formal übernommenen logarithmischen Temperatursesetzes führt im

(b) Die Nusselt-Zahl.

Bei einseitigem Wärmeaustausch im Ringspalt stellt der Fall paralleler Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch (PAS), den

Tabelle 7. Mischungstemperatur θ_m für turbulente Strömung in Ringspalten bei konstantem Wärmefluss in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl Pr^+ , von der Reynolds-Zahl Re und vom Radienverhältnis r_1/r_2 für Wärmeaustausch am inneren $[(r_1/r_2)_1]$ bzw. äusseren Zylinder $[(r_1/r_2)_2]$

$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)_1$	Re	Pr^+						
		0	0,01	0,03	0,1	1	10	100
0,7	$8,05 \cdot 10^3$	0,732	0,736	0,743	0,762	0,852	0,951	0,989
	$5,77 \cdot 10^4$	0,722	0,736	0,754	0,786	0,871	0,954	0,990
	$5,62 \cdot 10^5$	0,718	0,768	0,795	0,826	0,889	0,957	0,990
	$5,53 \cdot 10^6$	0,715	0,814	0,836	0,858	0,904	0,959	0,990
0,4	$7,30 \cdot 10^3$	0,781	0,784	0,790	0,808	0,887	0,964	0,993
	$5,24 \cdot 10^4$	0,774	0,787	0,803	0,831	0,904	0,968	0,993
	$5,08 \cdot 10^5$	0,771	0,816	0,840	0,866	0,919	0,970	0,993
	$4,97 \cdot 10^6$	0,769	0,856	0,876	0,894	0,931	0,972	0,993
0,2	$6,58 \cdot 10^3$	0,832	0,835	0,841	0,857	0,923	0,978	0,995
	$4,75 \cdot 10^4$	0,828	0,840	0,855	0,880	0,938	0,981	0,996
	$4,59 \cdot 10^5$	0,827	0,867	0,888	0,910	0,950	0,982	0,996
	$4,48 \cdot 10^6$	0,826	0,903	0,919	0,933	0,958	0,984	0,996
0,1	$9,05 \cdot 10^3$	0,870	0,873	0,879	0,894	0,949	0,987	0,997
	$6,50 \cdot 10^4$	0,869	0,880	0,894	0,916	0,962	0,989	0,998
	$6,37 \cdot 10^5$	0,869	0,906	0,925	0,943	0,971	0,991	0,998
	$6,30 \cdot 10^6$	0,869	0,938	0,950	0,960	0,977	0,992	0,998
$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)_2$	$8,05 \cdot 10^3$	0,671	0,675	0,683	0,705	0,811	0,934	0,986
	$5,77 \cdot 10^4$	0,657	0,673	0,694	0,731	0,834	0,939	0,987
	$5,62 \cdot 10^5$	0,650	0,710	0,742	0,778	0,856	0,942	0,987
	$5,53 \cdot 10^6$	0,646	0,764	0,790	0,817	0,874	0,945	0,987
0,4	$7,30 \cdot 10^3$	0,630	0,635	0,644	0,669	0,788	0,926	0,984
	$5,24 \cdot 10^4$	0,613	0,632	0,656	0,698	0,814	0,932	0,985
	$5,08 \cdot 10^5$	0,605	0,674	0,711	0,752	0,839	0,936	0,985
	$4,97 \cdot 10^6$	0,601	0,736	0,766	0,796	0,860	0,940	0,986
0,2	$6,58 \cdot 10^3$	0,595	0,600	0,610	0,638	0,771	0,921	0,983
	$4,75 \cdot 10^4$	0,576	0,597	0,625	0,673	0,801	0,928	0,984
	$4,59 \cdot 10^5$	0,567	0,646	0,688	0,734	0,830	0,933	0,985
	$4,48 \cdot 10^6$	0,562	0,717	0,750	0,783	0,853	0,937	0,986
0,1	$9,05 \cdot 10^3$	0,575	0,581	0,592	0,623	0,765	0,920	0,982
	$6,50 \cdot 10^4$	0,554	0,579	0,609	0,661	0,799	0,929	0,985
	$6,37 \cdot 10^5$	0,545	0,633	0,679	0,728	0,830	0,934	0,985
	$6,30 \cdot 10^6$	0,540	0,711	0,746	0,781	0,853	0,938	0,987

Tabelle 8. Auf die Nusselt-Zahl bei konstantem Wärmefluss Nu_q bezogene Nusselt-Zahl Nu sowie Mischungstemperatur θ_m in Abhängigkeit vom Parameter der Wärmeflussverteilung F_0 , von der Prandtl-Zahl Pr^+ und von der Reynolds-Zahl Re bei turbulenter Strömung in Ringspalten, Wärmeaustausch am inneren (q_{w1}) bzw. äusseren Zylinder (q_{w2})

Pr^+	Re	F_0	Nu/Nu_q	θ_m	F_0	Nu/Nu_q	θ_m	
		$r_1/r_2 = 0,4 (q_{w1})$			$r_1/r_2 = 0,4 (q_{w2})$			
0,01	$7,30 \cdot 10^3$	8,00	1,246	0,828	8,00	1,347	0,718	
	$5,24 \cdot 10^4$		1,248	0,830		1,351	0,715	
	$5,08 \cdot 10^5$		1,186	0,854		1,266	0,753	
	$4,97 \cdot 10^6$		1,115	0,886		1,175	0,804	
	$7,30 \cdot 10^3$	0	0,915	0,768	0	0,826	0,592	
	$5,24 \cdot 10^4$		0,915	0,771		0,823	0,589	
	$5,08 \cdot 10^5$		0,938	0,802		0,868	0,634	
	$4,97 \cdot 10^6$		0,964	0,847		0,920	0,704	
	$7,30 \cdot 10^3$	-1,40	0,600	0,702	-0,65	0,454	0,504	
	$5,24 \cdot 10^4$		0,618	0,710		0,436	0,497	
	$5,08 \cdot 10^5$		-1,60	0,674		0,740	0,548	0,539
	$4,97 \cdot 10^6$		-2,10	0,704		0,772	0,683	0,610
			$r_1/r_2 = 0,2 (q_{w1})$			$r_1/r_2 = 0,2 (q_{w2})$		
	0,01	$6,58 \cdot 10^3$	8,00	1,181	0,867	8,00	1,347	0,692
$4,75 \cdot 10^4$		1,179		0,870	1,350		0,690	
$4,59 \cdot 10^5$		1,126		0,892	1,263		0,733	
$4,48 \cdot 10^6$		1,072		0,920	1,166		0,791	
$6,58 \cdot 10^3$		0	0,945	0,824	0	0,807	0,549	
$4,75 \cdot 10^4$			0,946	0,830		0,806	0,545	
$4,59 \cdot 10^5$			0,964	0,859		0,858	0,597	
$4,48 \cdot 10^6$			0,981	0,899		0,917	0,679	
$6,58 \cdot 10^3$		-1,95	0,640	0,761	-0,50	0,507	0,472	
$4,75 \cdot 10^4$			-2,05	0,629		0,766	0,558	0,481
$4,59 \cdot 10^5$			-2,45	0,667		0,791	0,657	0,530
$4,48 \cdot 10^6$			-3,25	0,775		0,842	0,731	0,594
		$r_1/r_2 = 0,1 (q_{w1})$			$r_1/r_2 = 0,1 (q_{w2})$			
0,01		$9,05 \cdot 10^3$	8,00	1,126	0,897	8,00	1,341	0,678
	$6,50 \cdot 10^4$	1,121		0,901	1,344		0,676	
	$6,37 \cdot 10^5$	1,079		0,922	1,256		0,724	
	$6,30 \cdot 10^6$	1,039		0,947	1,159		0,787	
	$9,05 \cdot 10^3$	0	0,965	0,867	0	0,799	0,524	
	$6,50 \cdot 10^4$		0,967	0,874		0,798	0,521	
	$6,37 \cdot 10^5$		0,980	0,902		0,856	0,580	
	$6,30 \cdot 10^6$		0,991	0,936		0,919	0,671	
	$9,05 \cdot 10^3$	-2,65	0,633	0,795	-0,40	0,565	0,459	
	$6,50 \cdot 10^4$		-2,70	0,726		0,824	0,484	0,436
	$6,37 \cdot 10^5$		-3,50	0,669		0,828	0,614	0,495
	$6,30 \cdot 10^6$		-4,50	0,909		0,915	0,704	0,565

Grenzfall mit $r_1/r_2 = 1$ dar. Aus diesem Grund wurde für die Auftragung der Nusselt-Zahlen für den Fall $q_w = \text{konst.}$ die Form $Nu/Nu_{PAS} = f(Re, Pr^+, r_1/r_2)$ gewählt. Der Einfluss des Parameters F_0 geht aus den in der Tabelle 8

enthaltenen Quotienten $Nu/Nu_q = f(Re, Pr^+, r_1/r_2, F_0)$ hervor.

Für den Bereich kleiner Prandtl-Zahlen sind in Abb. 19 in Abhängigkeit vom Radienverhältnis r_1/r_2 für $q_{w1} = \text{konst.}$ und für $q_{w2} = \text{konst.}$

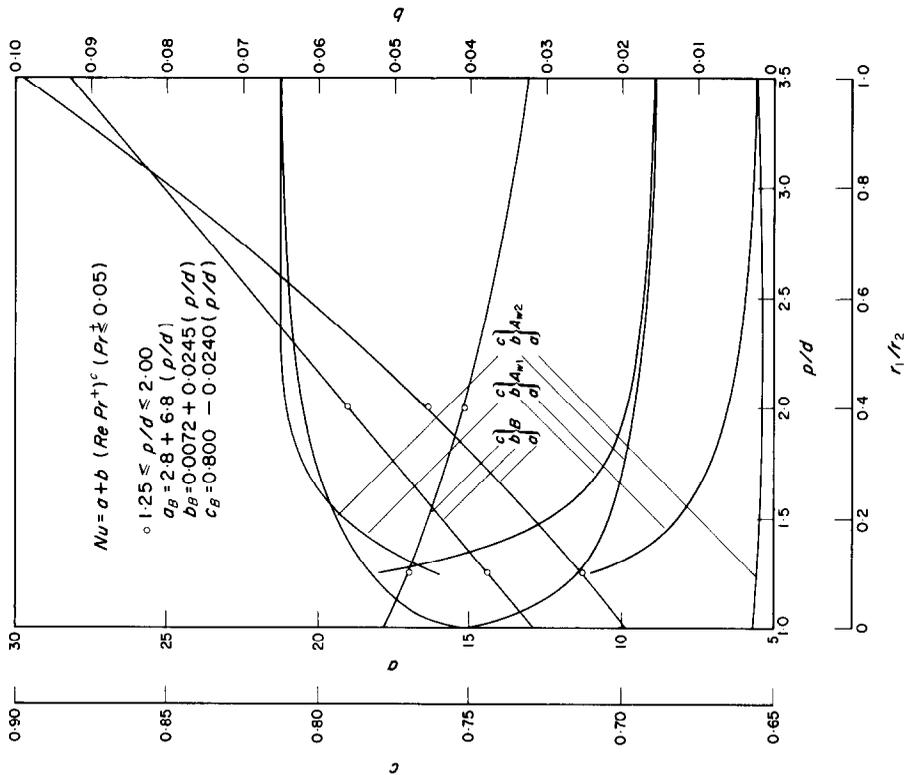


ABB. 19. Koeffizienten a , b und c zur angenäherten Wiedergabe der Nusselt-Zahlen in der Form $Nu = a + b(RePr)^c$ ($Pr^+ < 0.05$) in Abhängigkeit vom Radienverhältnis r_1/r_2 beim Ringspalt bzw. vom Rohrmittensabstand p/d beim Rohrbündel (Dreieckanordnung) bei turbulenter Strömung für $q_{w1} = \text{konst.}$ bzw. $q_{w2} = \text{konst.}$

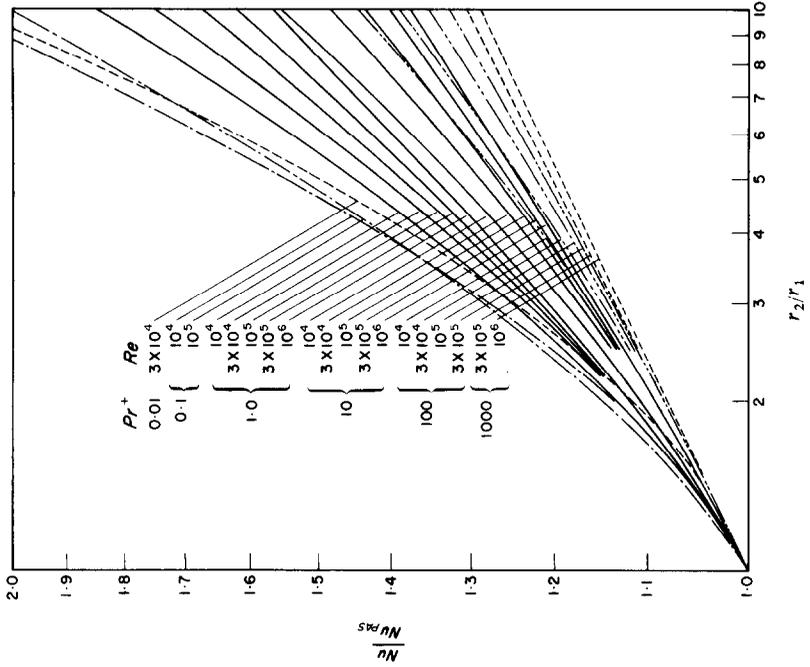


ABB. 20. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_{pas} = f(r_2/r_1, Re, Pr^+)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für $q_{w1} = \text{konst.}$

die Koeffizienten a , b und c der Näherungsgleichung $Nu = a + b(RePr^+)^c$ aufgetragen. Die mittleren quadratischen Abweichungen von den für $Pr^+ = 0,01$ und $Pr^+ = 0,03$ berechneten Werten Nu betragen für die 4 Radienverhältnisse $r_1/r_2 = 0,7 - 0,4 - 0,2 - 0,1$ jeweils 2,2 Prozent. Was die Ergebnisse aus Messungen an Flüssigmetallen anbetrifft, so lassen die bisher bekannt gewordenen Arbeiten noch keinen zuverlässigen Aufschluss über den Einfluss des Radienverhältnisses auf die Nusselt-Zahl erkennen.

In Abb. 20 ist Nu/Nu_{PAS} über r_2/r_1 in doppellogarithmischen Koordinaten aufgetragen. In dieser Darstellung nehmen die Kurven für hohe Prandtl-Zahlen einen nahezu linearen Verlauf an.

Für mittlere bis grosse Prandtl-Zahlen lassen sich aus den berechneten Nusselt-Zahlen ebenfalls Näherungsgleichungen angeben. Dazu wird

wieder die Beziehung (45) herangezogen, deren Herleitung zwar, wie bereits erwähnt, für den Fall des Ringspalts nicht gilt. Der Vorteil dieser Beziehung, der darin besteht, den Einfluss der Prandtl- und der Reynolds-Zahl über einen grossen Bereich zuverlässig zu beschreiben, kann jedoch auch beim Ringspalt genutzt werden, wenn anstelle der Widerstandsbeiwerte ζ_1 und ζ_2 fiktive Widerstandsbeiwerte ζ_F eingeführt werden. Diese sind so definiert, dass sie die Gleichung (52) mit $f(Pr^+) = f_{PAS}(Pr^+)$ befriedigen ($A = 0,58$). Mittelwerte der Funktion $\zeta_{F1} = f(Re, Pr^+, r_1/r_2)$ sind in Abb. 21 für den Fall, dass der Wärmeaustausch an der inneren Wand stattfindet, in der Form $\zeta_{F1}/\zeta_T^+ = f_1(Re, r_1/r_2 = \text{konst.})$ (Abszissenskala unten) und $\zeta_{F1}/\zeta_T^+ = f_2(r_2/r_1, Re = \text{konst.})$ (Abszissenskala oben) dargestellt. Für ζ_{F1}/ζ_T^+ lässt sich folgende im Bereich $1 \leq r_2/r_1 \leq 10$ gültige Näherungsgleichung aufstellen:

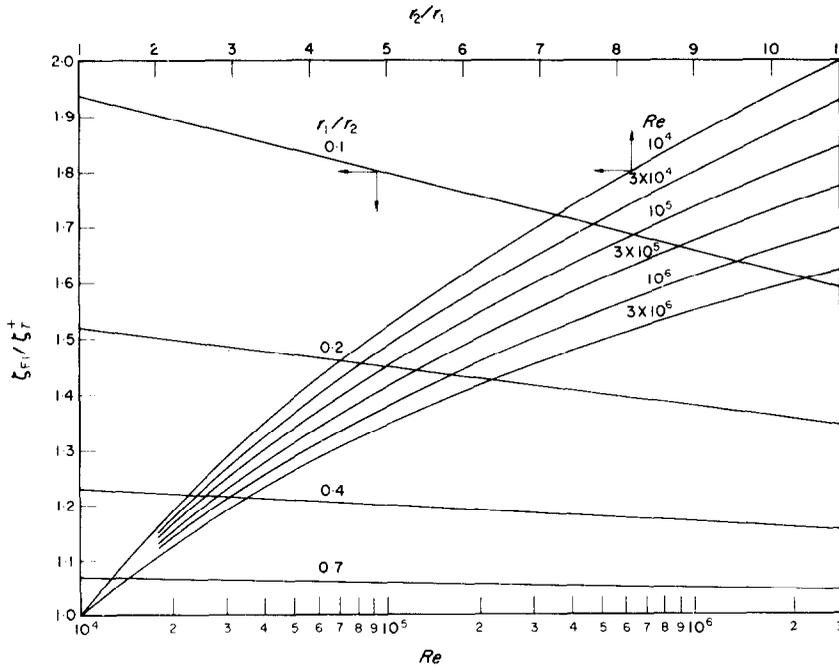


ABB. 21. Fiktiver Widerstandsbeiwert $\zeta_{F1}/\zeta_T^+ = f(Re, r_1/r_2)$ zur angenäherten Wiedergabe der Nusselt-Zahlen in der Form $Nu = RePr^+(\zeta_{F1}/8)/[1 + 10(Pr^+ - 0,58)(Pr^+)^{-0,22}\sqrt{(\zeta_{F1}/8)}]$.

$$\frac{\zeta_{F1}}{\zeta_r^+} = 1 + \left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right) [0,18 - 0,017 \lg(Re)]. \quad (79)$$

Für den Vergleich der in der vorliegenden Arbeit berechneten Nusselt-Zahlen mit experimentell an Flüssigkeiten mittlerer Prandtl-Zahl ermittelten Ergebnissen eignet sich die Auftragung der Abb. 20 am besten, da in der Mehrzahl der experimentellen Arbeiten der Einfluss des Radienverhältnisses auf die Nusselt-Zahl durch eine Beziehung der Form $Nu \sim (r_2/r_1)^n$ angegeben wird. Die Werte der Exponenten n weisen dabei allerdings beträchtliche Unterschiede auf.

Von Walger [34] wurde nach Auswertung von Messergebnissen mehrerer Autoren die Beziehung $Nu_1 = 0,021 (r_2/r_1)^{0,45} Re^{0,8} Pr^{\pm}$ empfohlen. Die Streuungen der Messergebnisse in bezug auf die dieser Gleichung entsprechenden Kurve betragen allerdings ± 20 Prozent. Der Betrag dieser Streuungen liegt also ungefähr in derselben Höhe, wie nach der Theorie für den Einfluss von r_1/r_2 auf Nu zu erwarten ist. Aus der zuvor genannten Formel ergibt sich im Vergleich zur Theorie ein wesent-

$$\frac{Nu}{Nu_{PAS}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{0,16} \quad \text{für } Pr^+ = 10 \quad (80c)$$

$$\frac{Nu}{Nu_{PAS}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{0,13} \quad \text{für } Pr^+ > 100. \quad (80d)$$

Neuere experimentelle Untersuchungen bestätigen den aus der Theorie sich ergebenden Zusammenhang $Nu(r_1/r_2)$. Von Judd *et al.* [35] wurden in 6 Ringspalten mit den Radienverhältnissen $r_2/r_1 = 1,5 - 2,0 - 2,5 - 3,0 - 3,5 - 4,0$ Wärmeübergangsmessungen an Wasser durchgeführt ($Re = 20000 \dots 120000$). Für diesen r_2/r_1 -Bereich ergab sich $Nu \sim (r_2/r_1)^{0,25}$. Der Wert des Exponenten $n = 0,25$ stimmt in etwa mit der aus Abb. 21 zu entnehmenden Neigung $n' = 0,23$ an die Kurve Nu/Nu_{PAS} für $Pr^+ = 1 - Re = 3 \cdot 10^4 - 1,5 < r_2/r_1 < 4$ überein. Die auf die Nusselt-Zahl $Nu_{1,5}$ für das Radienverhältnis $r_2/r_1 = 1,5$ bezogene Nusselt-Zahlen Nu sind für $Re = 3 \cdot 10^4$ in der nachfolgenden Tabelle mit den analytisch gewonnenen Ergebnissen verglichen ($Pr^+ = 1$).

	r_2/r_1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
Judd <i>et al.</i> [35]	$Nu/Nu_{1,5}$	1,00	1,04	1,08	1,14	1,19	1,23
Vorliegende Arbeit	$Nu/Nu_{1,5}$	1,00	1,06	1,11	1,15	1,20	1,25

lich stärkerer Einfluss von r_2/r_1 auf Nu . Aus Abb. 21 lassen sich für den Bereich $r_2/r_1 = 1 \dots 10$ näherungsweise folgende Beziehungen entnehmen (gemittelt über Re):

$$\frac{Nu}{Nu_{PAS}} = 0,94 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{0,25} \quad \text{für } Pr^+ = 1 (r_2/r_1 = 2,5 \dots 10) \quad (80a)$$

Die Ergebnisse der von Presser *et al.* [33] durchgeführten Messungen des Wärmeaustauschs an Kohlendioxyd und Stickstoff werden anschliessend, ebenfalls in der Form $Nu/Nu_{1,5}$, den für $Pr^+ = 1$ und $Re = 3 \cdot 10^5$ berechneten Werten gegenübergestellt.

	r_2/r_1	1,5	2,0	2,67
Presser <i>et al.</i> [33]	$Nu/Nu_{1,5}$	1,00	1,02	1,15
Vorliegende Arbeit	$Nu/Nu_{1,5}$	1,00	1,05	1,12

$$\frac{Nu}{Nu_{PAS}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{0,18} \quad \text{für } Pr^+ = 1 (r_2/r_1 = 1 \dots 2,5) \quad (80b)$$

Absolutwerte der von Kays *et al.* [30] gemessenen Nusselt-Zahlen sind in der folgenden Tabelle mit den in der vorliegenden Arbeit

berechneten Werten verglichen ($Pr = 0,7 - Re = 40000$).

Rohre bezeichnet wird. Für quadratisch angeordnete Rohre ist der in entsprechender Weise

	r_1/r_2	0	0,192	0,255	0,375	0,500
Kays <i>et al.</i> [30]	Nu_1	--	97,0	93,0	84,5	81,0
	Nu_2	87,0	81,5	79,5	76,0	76,0
Vorliegende Arbeit	Nu_1	--	103,1	92,8	86,2	81,1
	Nu_2	85,8	76,1	74,4	73,6	72,5

Die Übereinstimmung erweist sich, insbesondere für den wichtigen Fall $q_{w1} = \text{konst.}$, als recht gut. Der Einfluss des Halbmesserverhältnisses r_1/r_2 auf Nu_1 ist in [30] im Vergleich zu den älteren experimentellen Arbeiten wesentlich geringer. Die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen von Kays *et al.* decken sich ausgezeichnet mit deren Messungen, die Fälle mit beidseitigem Wärmeaustausch inbegriffen.

3.5 Das Rohrbündel

Wie bereits in der Einleitung vermerkt, wird zur Berechnung der Strömung und des Wärmeübergangs längs Rohrbündeln das bereits von Lyon [11] angewandte Verfahren übernommen, welches das Hexagon verschwindender Schubspannung durch einen Kreis gleichen Flächeninhalts ersetzt. Der Radius r_c dieses Kreises folgt aus der Beziehung

$$\left(\frac{r_c}{r_1}\right)_\Delta = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)\frac{p}{d}} = 1,050 \frac{p}{d} \quad (81)$$

wobei mit p der Achsabstand zwischen den im Dreieck angeordneten Rohren und mit d und r_1 der äussere Durch- bzw. Halbmesser dieser

definierte Halbmesser r_c aus der Gleichung $(r_c/r_1)_\square = 1,127 p/d$ zu berechnen, mit p als Seitenlänge des aus den Rohrachsen gebildeten Quadrats. Das Ersetzen des ein jedes Rohr umgebenden seitengleichen Rechtecks verschwindender Schubspannung durch einen flächengleichen Kreis bedeutet hier natürlich eine wesentlich deutlichere Abkehr von den tatsächlich vorliegenden Verhältnissen, als dies beim Hexagon der Dreieckanordnung der Fall ist. (Die für Dreieckteilung berechneten numerischen Ergebnisse können für die quadratische Teilung mit dem Abstandsverhältnis $(p/d)_\square = 0,932 (p/d)_\Delta$ übernommen werden.)

Unter diesen Vereinfachungen lassen sich die strömungsmechanischen Grössen direkt aus den für die innere Hälfte des Ringspaltel geltenden Gleichungen bestimmen.

3.5.1 Laminare Strömung

3.5.1.1 Exakte Berechnung für $q_w = \text{konst.}$
Führt man die in Abschnitt 3.4.1.1 (Ringspalt) beschriebenen Berechnungen für das Rohrbündel durch, so erhält man folgende Ergebnisse:

(a) Für den Wärmestromdichteverlauf: $q/q_w = n_1/n_2$ mit

$$n_1 = y^{+2} [\ln y^{+2} - (r_1/r_c)^2 y^{+2}/2 + (r_1/r_c)^2 - 1] + [\ln (r_1/r_c)^2 + 3/2]/(r_1/r_c)^2 - 1 \quad (82a)$$

und

$$n_2 = y^+ \{ (r_1/r_c)^2/2 - 2 + [\ln (r_1/r_c)^2 + 3/2]/(r_1/r_c)^2 \} \quad (82b)$$

(b) Für den Temperaturverlauf: $\theta = n_3/n_4$ mit

$$n_3 = \frac{3}{4} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 2 - y^{+2} \left[\ln y^{+2} - \frac{1}{4} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 y^{+2} + \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 2 \right] - \ln y^{+2} \left\{ \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \left[\ln \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 + \frac{3}{2} \right] - 1 \right\} \quad (83a)$$

und

$$n_4 = \frac{3}{4} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 3 + \frac{9}{4} \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + \ln \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \left[\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \ln \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{5}{2} \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + 1 \right]. \quad (83b)$$

Für die Mischungstemperatur: $\theta_m = n_5/n_6$ mit

$$n_5 = \left[\frac{9}{2} \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - 2 \right] \left[\ln \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \right]^2 \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + \left[10 \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{95}{12} \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^4 - \frac{5}{2} \right] \ln \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + \left\{ \frac{719}{144} - \left[\ln \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \right]^3 \right\} \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^4 + \frac{11}{48} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^4 - \frac{35}{3} \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{23}{9} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 + 9 \quad (84a)$$

und

$$n_6 = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \left[\ln \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 + \frac{3}{2} \right] - 2 \right\} \left\{ \frac{3}{4} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 3 + \frac{9}{4} \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + \ln \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \left[\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \ln \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{5}{2} \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + 1 \right] \right\}. \quad (84b)$$

(d) Für die Nusselt-Zahl: $Nu = n_7/n_8$ mit

$$n_7 = 4 \left[1 - \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \right] \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \left[\ln \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 + \frac{3}{2} \right] - 2 \right\}^2 \quad (85a)$$

und

$$n_8 = \left[\frac{9}{2} \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - 2 \right] \left[\ln \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \right]^2 \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + \left[10 \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{95}{12} \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^4 - \frac{5}{2} \right] \ln \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + \left\{ \frac{719}{144} - \left[\ln \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \right]^3 \right\} \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^4 + \frac{11}{48} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^4 - \frac{35}{3} \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{23}{9} \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 + 9. \quad (85b)$$

3.5.1.2 *Ergebnisse für den Wärmeübergang bei $q_w \neq \text{konst.}$* Als Beispiel für die Abhängigkeit der Temperaturverteilung vom Parameter der Wärmeflussverteilung F_0 ist in Abb. 22 die Funktion $\theta = f[(r - r_1)/(r_c - r_1), F_0 = \text{konst.}]$ für $p/d = 1,61$ (Dreieckteilung) dargestellt.

Der Einfluss des Parameters F_0 auf die

Nusselt-Zahl geht aus Abb. 23 hervor: $Nu/Nu_q = f(F_0, p/d = \text{konst.})$. In dieser Abbildung ist auch die Zuordnung $p/d - r_1/r_2$ durch einige Wertepaare angegeben.

3.5.2 Turbulente Strömung

3.5.2.1 *Formeln für strömungsmechanische Größen.* Die in Abschnitt 3.4.2.1 für den Ring-

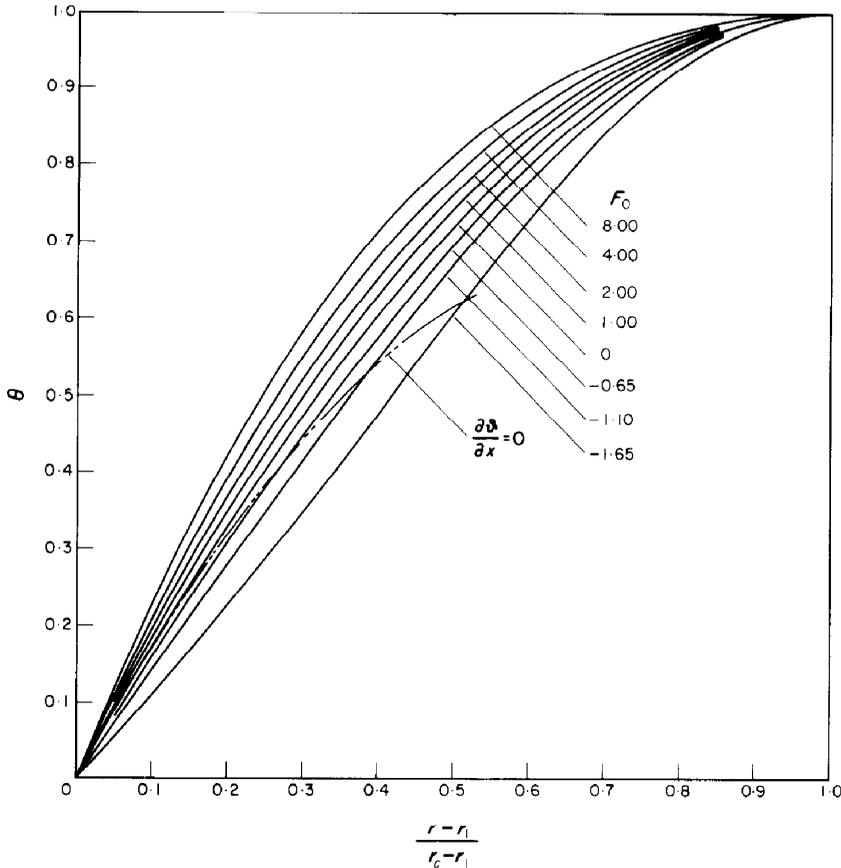


ABB. 22. Temperaturverlauf $\theta = f[(r - r_1)/(r_c - r_1), F_0]$ bei laminarer Strömung längs eines Rohrbündels mit $p/d = 1,61$ (Dreieckanordnung).

spalt hergeleiteten Beziehungen, die ihrerseits auf den für das Rohr gültigen Zusammenhängen basieren, können nun noch auf die Strömung längs Rohrbündeln erweitert werden. Die gemeinsame Kenngrösse bei dieser Verkettung Rohr-Ringspalt-Rohrbündel ist die bereits eingeführte sog. äquivalente Rohr-Reynolds-Zahl Re_T , die sich aus folgender Gleichung berechnen lässt:

$$Re_T = \frac{r_2/r_1 - r_c/r_1}{(r_c/r_1)^2 - 1} \frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{mB}} Re_B \quad (86)$$

Für den Widerstandskoeffizienten ζ_B erhält man die Beziehung

$$\frac{\zeta_B}{\zeta_T^+} = \frac{(r_c/r_1)^2 - 1}{(r_1/r_2) [(r_2/r_1)^2 - (r_c/r_1)^2]} \left(\frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{mB}} \right)^2 \times \left[\frac{\log(Re_B/7)}{\log(Re_T/7)} \right]^2 \quad (87)$$

wobei ζ_T^+ den für Re_B aus dem Widerstandsgesetz des Rohres ermittelten Wert bedeutet.

3.5.2.2 Ergebnisse für strömungsmechanische Grössen.

(a) Die Geschwindigkeitsverteilung.

Die von der Reynolds-Zahl und vom Teilungsverhältnis abhängigen Koeffizienten a , und c , der für $\eta > 30$ näherungsweise gültigen Be-

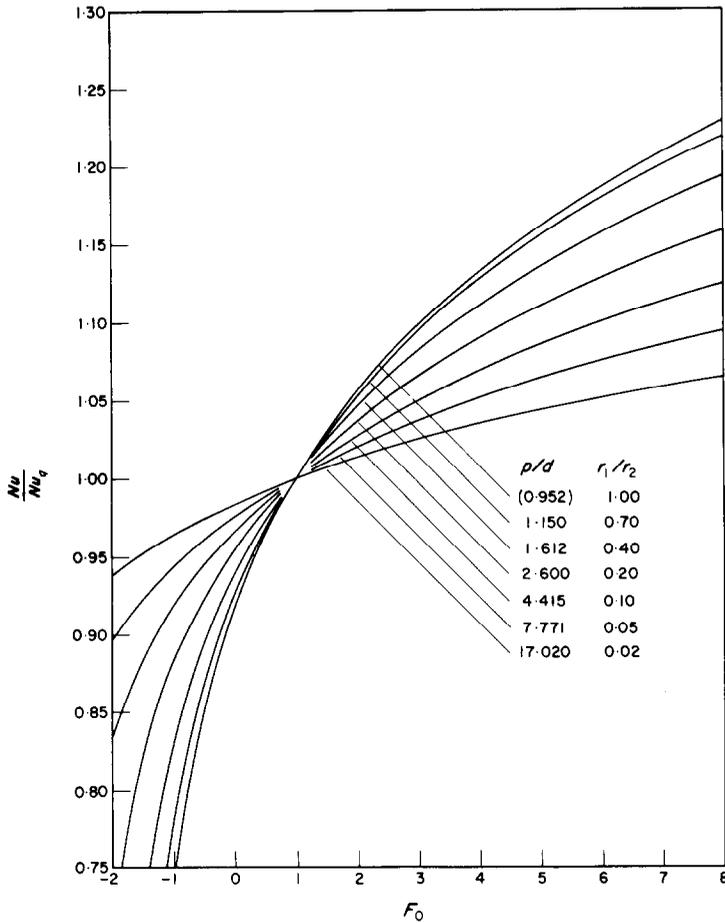


ABB. 23. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_0 = f(F_0, p/d)$ bei laminarer Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung), einschliesslich des Grenzfall $p/d = 0,952$: Parallele Platten, symmetrischer Wärmeaustausch.

ziehung $u/u^+ = a \ln \eta + c$ sowie die über $Re_T = 10^4 \dots 3 \cdot 10^6$ gemittelten Koeffizienten a und c , die nur noch von p/d abhängen, sind in Tabelle 5 aufgeführt.

In Tabelle 9 sind die für verschiedene Wertepaare $(Re_T, p/d)$ aus der Gleichung (86) gewonnenen Rohrbündel-Reynolds-Zahlen Re_B gemeinsam mit den mittleren Geschwindigkeiten φ_{mB} und dem zugeordneten Ringspalt r_1/r_2 wiedergegeben.

(b) Der Widerstandsbeiwert.

Das Verhältnis aus dem Widerstandsbeiwert

$\zeta_B(Re_B)$ und dem aus dem Widerstandsgesetz des glatten Rohres berechneten Wert $\zeta_T^+ = \zeta_T(Re_B)$ ist in Abb. 24 dargestellt: $\zeta_B/\zeta_T^+ = f_1(Re, p/d = \text{konst.})$ (Abszissenskala unten) und $\zeta_B/\zeta_T^+ = f_2(p/d, Re = \text{konst.})$ (Abszissenskala oben). Wie durch kleine Kreise bzw. Quadrate angedeutet ist, lässt sich der Quotient ζ_B/ζ_T^+ näherungsweise mit Hilfe der beiden folgenden Gleichungen wiedergeben:

$$\zeta_B/\zeta_T^+ = 0,81 + 0,24 \frac{p}{d}$$

$$\text{(für } 1,24 \leq \frac{p}{d} \leq 2,0 - Re \geq 3 \cdot 10^4 \text{)} \quad (88a)$$

Tabelle 9. Reynolds-Zahl Re_B , mittlere Geschwindigkeit φ_{mB} und Radienverhältnis r_1/r_2 des zugeordneten Ringspalts in Abhängigkeit von der äquivalenten Rohr-Reynolds-Zahl Re_T bei turbulenter Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung)

Re_T	p/d	1,25	1,60	1,95	3,50
$4 \cdot 10^3$	Re_B	$9,45 \cdot 10^3$	$1,00 \cdot 10^4$	$1,06 \cdot 10^4$	$1,26 \cdot 10^4$
	φ_{mB}	0,8549	0,8742	0,8888	0,9258
	r_1/r_2	0,5996	0,3928	0,2852	0,1152
10^4	Re_B	$2,29 \cdot 10^4$	$2,41 \cdot 10^4$	$2,54 \cdot 10^4$	$3,01 \cdot 10^4$
	φ_{mB}	0,8784	0,8958	0,9089	0,9418
	r_1/r_2	0,5992	0,3922	0,2845	0,1149
$3 \cdot 10^4$	Re_B	$6,70 \cdot 10^4$	$7,02 \cdot 10^4$	$7,36 \cdot 10^4$	$8,59 \cdot 10^4$
	φ_{mB}	0,8973	0,9130	0,9247	0,9537
	r_1/r_2	0,5986	0,3911	0,2831	0,1135
10^5	Re_B	$2,19 \cdot 10^5$	$2,28 \cdot 10^5$	$2,38 \cdot 10^5$	$2,72 \cdot 10^5$
	φ_{mB}	0,9112	0,9257	0,9364	0,9623
	r_1/r_2	0,5981	0,3899	0,2814	0,1114
$3 \cdot 10^5$	Re_B	$6,50 \cdot 10^5$	$6,72 \cdot 10^5$	$6,95 \cdot 10^5$	$7,80 \cdot 10^5$
	φ_{mB}	0,9205	0,9341	0,9441	0,9678
	r_1/r_2	0,5977	0,3888	0,2798	0,1084
10^6	Re_B	$2,14 \cdot 10^6$	$2,20 \cdot 10^6$	$2,26 \cdot 10^6$	$2,49 \cdot 10^6$
	φ_{mB}	0,9285	0,9412	0,9507	0,9723
	r_1/r_2	0,5972	0,3876	0,2780	0,1073
$3 \cdot 10^6$	Re_B	$6,37 \cdot 10^6$	$6,1 \cdot 10^6$	$6,65 \cdot 10^7$	$7,18 \cdot 10^6$
	φ_{mB}	0,9344	0,9466	0,9555	0,9754
	r_1/r_2	0,5968	0,3865	0,2764	0,1054

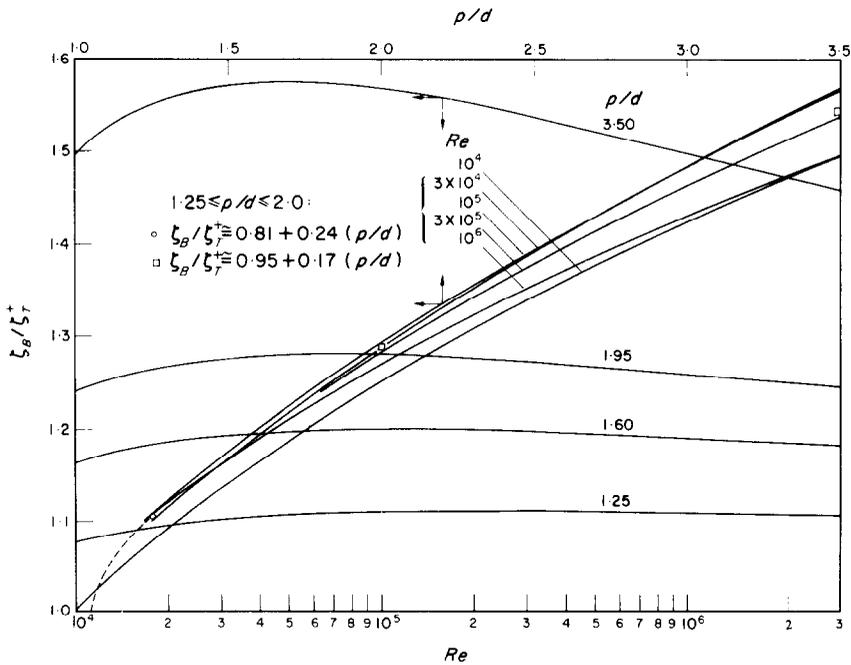


ABB. 24. Verhältnis der Widerstandsziffern $\zeta_B/\zeta_T^+ = f(Re, p/d)$ bei der turbulenten Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung).

$$\zeta_B/\zeta_T^+ = 0,95 + 0,17 \frac{p}{d}$$

(für $\frac{p}{d} \geq 2 - Re = 3 \cdot 10^4 \dots 3 \cdot 10^5$). (88b)

Diese Ergebnisse sind in guter Übereinstimmung mit mehreren Versuchsergebnissen. Die von Eifler *et al.* [36] in einer von Wasser durchströmten Rohrbündel-Anordnung bei den Teilungsverhältnissen $p/d = 1,0 \dots 1,20$ gemessenen Widerstandsbeiwerte schliessen sich an die in der vorliegenden Arbeit für $p/d \geq 1,25$ berechneten Werte an. Diese Messergebnisse sind in Abb. 24 durch die gestrichelte Linie angedeutet.

Die gute Übereinstimmung mit dem Experiment lässt darauf schliessen, dass die Näherung,

die darin besteht, die Strömung in einem Rohrbündel derjenigen in der inneren Hälfte eines Ringspalts gleichzusetzen, bis herunter zu Teilungsverhältnissen von $p/d = 1,20$ zulässig ist.

Ergebnisse aus Messungen von Firsova [37] an Wasser in einem Rohrbündel mit $p/d = 1,20$ decken sich im Bereich kleiner Reynolds-Zahlen in etwa mit den hier berechneten Werten, für $Re > 10^4$ dagegen sind sie höher.

3.5.2.3 Ergebnisse für den Wärmeaustausch.

(a) Die Temperaturverteilung.

Die Koeffizienten a und $c(Pr^+)$ des logarithmischen Temperaturgesetzes sind in Tabelle 1 für die 4 Teilungsverhältnisse $p/d = 1,25 - 1,60 - 1,95 - 3,50$ aufgeführt. Werte der Mischungstemperatur θ_m sind für den Fall

Tabelle 10. Auf die Nusselt-Zahl bei konstantem Wärmefluss Nu_q bezogene Nusselt-Zahl Nu sowie Mischungstemperatur θ_m in Abhängigkeit vom Parameter der Wärmeflussverteilung F_0 , von der Prandtl-Zahl Pr^+ und von der Reynolds-Zahl Re bei turbulenter Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung)

Pr^+	Re	F_0	Nu/Nu_q	θ_m	Re	F_0	Nu/Nu_q	θ_m		
$p/d = 1,25$					$p/d = 1,60$					
0,01	9,45 · 10 ³	8,00	1,276	0,806	1,00 · 10 ⁴	8,00	1,252	0,823		
	6,70 · 10 ⁴		1,287	0,804	7,02 · 10 ⁴		1,263	0,822		
	6,50 · 10 ⁵		1,207	0,841	6,72 · 10 ⁵		1,187	0,857		
	6,37 · 10 ⁶		1,121	0,884	6,51 · 10 ⁶		1,105	0,899		
	9,45 · 10 ³	0	0,896	0,733	1,00 · 10 ⁴	0	0,910	0,759		
	6,70 · 10 ⁴		0,894	0,732	7,02 · 10 ⁴		0,908	0,759		
	6,50 · 10 ⁵		0,928	0,783	6,72 · 10 ⁵		0,939	0,808		
	6,37 · 10 ⁶		0,963	0,845	6,51 · 10 ⁶		0,970	0,868		
	9,45 · 10 ³	-1,20	0,549	0,661	1,00 · 10 ⁴	-1,40	0,530	0,681		
	6,70 · 10 ⁴		0,549	0,662	7,02 · 10 ⁴		0,542	0,686		
	6,50 · 10 ⁵		0,644	0,715	6,72 · 10 ⁵		0,655	0,743		
	6,37 · 10 ⁶		0,648	0,753	6,51 · 10 ⁶		0,747	0,807		
	$p/d = 1,95$					$p/d = 3,50$				
	0,01	1,06 · 10 ⁴	8,00	1,232	0,836	1,26 · 10 ⁴	8,00	1,174	0,871	
7,36 · 10 ⁴		1,242		0,835	8,59 · 10 ⁴	1,181		0,872		
6,95 · 10 ⁵		1,170		0,870	7,80 · 10 ⁵	1,121		0,906		
6,65 · 10 ⁶		1,093		0,910	7,18 · 10 ⁶	1,063		0,940		
1,06 · 10 ⁴		0	0,920	0,778	1,26 · 10 ⁴	0	0,946	0,830		
7,36 · 10 ⁴			0,918	0,780	8,59 · 10 ⁴		0,946	0,834		
6,95 · 10 ⁵			0,948	0,828	7,80 · 10 ⁵		0,968	0,881		
6,65 · 10 ⁶			0,975	0,885	7,18 · 10 ⁶		0,986	0,929		
1,06 · 10 ⁴		-1,55	0,545	0,702	1,26 · 10 ⁴	-2,05	0,609	0,760		
7,36 · 10 ⁴			0,514	0,700	8,59 · 10 ⁴		0,635	0,774		
6,95 · 10 ⁵			0,522	0,733	7,80 · 10 ⁵		0,679	0,824		
6,65 · 10 ⁶			0,754	0,829	7,18 · 10 ⁶		0,876	0,909		

$q_w = \text{konst.}$ in Tabelle 2 und für den Fall $q_w \neq \text{konst.}$ in Tabelle 10 angegeben.

(b) Die Nusselt-Zahl.

Durch die Näherung $r_c \cong r(\tau = 0)$ entspricht dem (rein rechnerischen) Teilungsverhältnis $p/d = 0,952$ das Radienverhältnis $r_c/r_1 = r_2/r_1 = 1$, also der Fall der parallelen Platten bei symmetrischem Wärmeaustausch (PS). Aus diesem Grund ist es vorteilhaft, die Nusselt-Zahl durch das Verhältnis Nu/Nu_{PS} anzugeben.

Für den Fall $q_w = \text{konst.}$ ist diese Grösse in Abb. 25 über dem Teilungsverhältnis p/d aufgetragen. Mit steigender Prandtl- und steigender Reynolds-Zahl nimmt Nu/Nu_{PS} ab, mit steigendem Teilungsverhältnis dagegen nimmt Nu/Nu_{PS} näherungsweise linear mit p/d zu. Die im Bereich $p/d < 1,2$ in Abb. 25 eingezeichneten Kurven gelten nur für die innere Hälfte des zugeordneten Ringspalts, da für das Rohrbündel die Näherung $r_c \cong r(\tau = 0)$ dort nicht mehr zulässig ist.

Zur Berechnung der Nusselt-Zahl bei kleinen Prandtl-Zahlen mit Hilfe der Gleichung $Nu = a + b(RePr^+)^c$ sind in Abb. 19 die nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate für $Pr^+ = 0,01$ und $Pr^+ = 0,03$ berechneten Koeffizienten a, b und c in Abhängigkeit von p/d aufgetragen. Die mittleren quadratischen Abweichungen betragen für die 4 Teilungsverhältnisse je 1,8 Prozent.

Ab mittleren Prandtl-Zahlen eignet sich die Beziehung (45) wieder in sehr vorteilhafter Weise zur Wiedergabe der berechneten Nusselt-Zahlen (im Fall des Rohrbündels ist die bei der Herleitung von (45) getroffene Voraussetzung $r_c = r_0$ erfüllt). Mit den in Abb. 24 dargestellten Quotienten ζ_B/ζ_T^+ [bzw. angenähert durch Gleichung (88a, b)] lässt sich Nu aus der Gleichung (52) mit $A = A_{PS} = 0,94$ bestimmen. Die mittleren quadratischen Abweichungen e für die Gesamtheit der Wertepaare $Pr^+ = 1 - 3 - 10 - 14 - 100 - 1000$, $Re_T \geq 4 \cdot 10^3$ beträgt in Prozent (die Werte in Klammern geben die

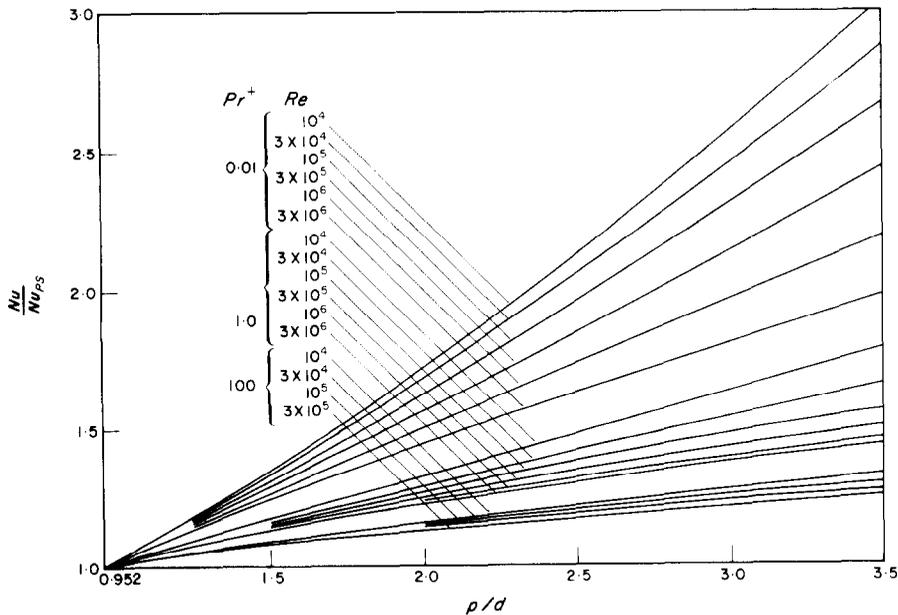


ABB. 25. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_{PS} = f(p/d, Pr^+, Re)$ bei der turbulenten Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung) für $q_w = \text{konst.}$

Teilungsverhältnisse an): $e = 1,7 (1,25) - 2,1 (1,60) - 2,7 (1,95) - 5,6 (3,50)$. Diese geringen Abweichungen bringen die Leistungsfähigkeit der Beziehung (45) überzeugend zum Ausdruck, wenn man bedenkt, dass in dem hier betrachteten Fall der Widerstandsbeiwert nicht nur den Einfluss der Reynolds-Zahl, sondern auch den Einfluss des Teilungsverhältnisses umfasst.

Der Einfluss des Parameters der Wärme-

flussverteilung F_0 auf die Nusselt-Zahl Nu ist in Tabelle 10 für die vier obengenannten Teilungsverhältnisse in Abhängigkeit von der Prandtl- und von der Reynolds-Zahl in der Form Nu/Nu_q angegeben.

In Ermangelung zuverlässiger experimenteller Ergebnisse wurde in der Abteilung für Flüssigmetalle des Kernforschungszentrums Fontenay-aux-Roses (CEA) ein von Rieger [38] und vom

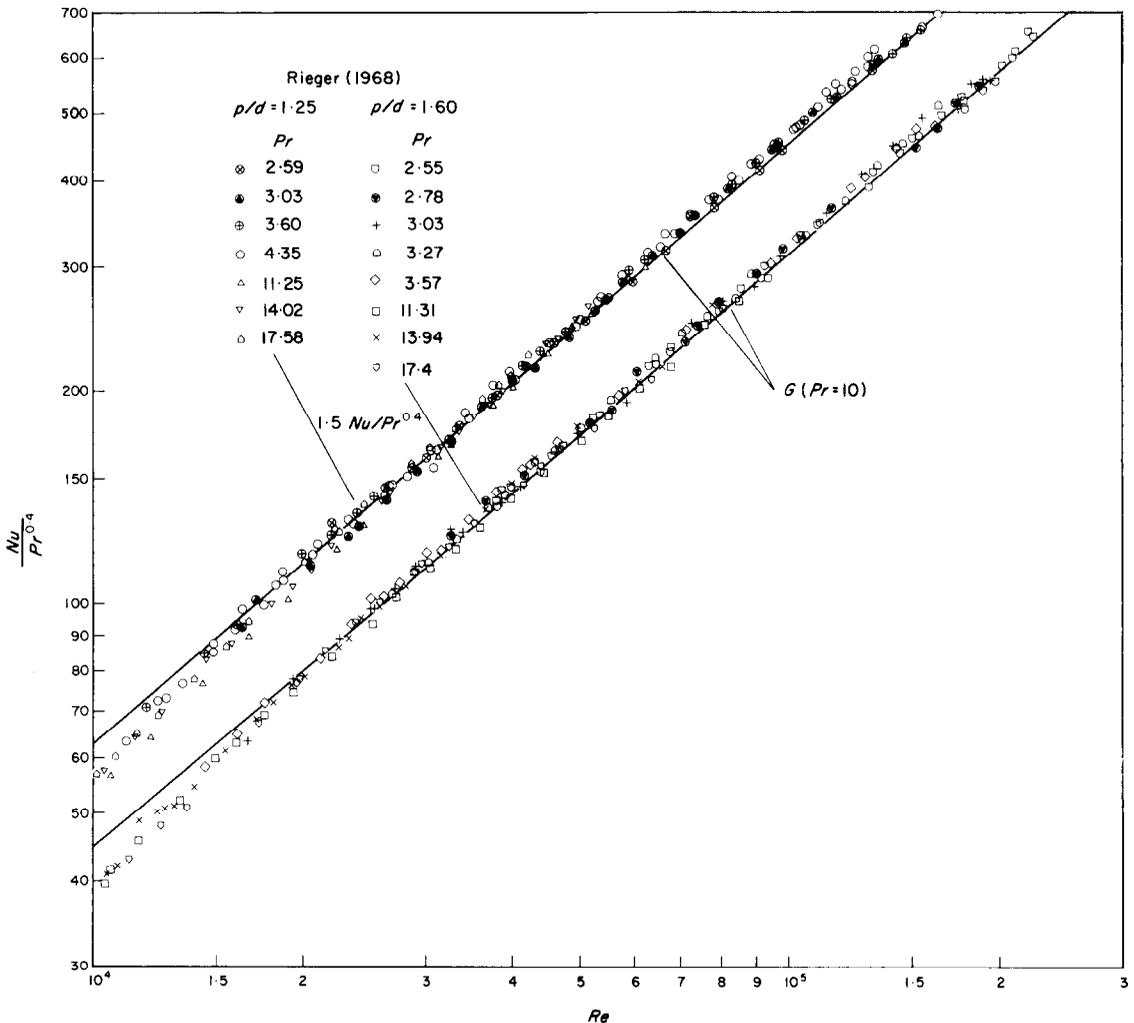


ABB. 26. Vergleich der für die turbulente Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung $-q_w = \text{konst.}$) in der vorliegenden Arbeit berechneten ($G - Pr = 10$) und von M. Rieger an Wasser und an einem Wasser-Glykol-Gemisch gemessenen Nusselt-Zahlen in der Form $Nu/Pr^{0.4} = f(Re, p/d)$. (Für $p/d = 1,25$ sind die Werte mit dem Faktor 1,5 multipliziert.)

Verfasser entworfener Versuchskreislauf zur Messung des Wärmeaustauschs längs Rohrbündeln gebaut. Diese Anlage war so ausgelegt, dass die Wärmeübertragung sowohl an Wasser und Wasser-Glykol-Gemischen als auch an einer Natrium-Kalium-Legierung untersucht werden konnte. An 3 Messkammerpaaren mit je 31 Rohren und den Teilungsverhältnissen $p/d = 1,25 - 1,60 - 1,95$ wurden je in einer als Heizer ausgeführten Messkammer der Fall $F_0 = 1$ ($q_w = \text{konst.}$) und—beschränkt auf die Versuchsreihe mit NaK—in einer als Wärmeaustauscher ausgeführten Messkammer die Fälle $F_0 \neq 1$ (einschliesslich des Sonderfalls $F_0 = 1$) vorgesehen. Das Versuchsprogramm ist inzwischen abgeschlossen. Die an der Natrium-Kalium-Legierung vorgenommenen Messungen sind noch nicht ausgewertet, die Ergebnisse darüber werden zu einem späteren Zeitpunkt veröffentlicht werden. Der Bericht über die von Rieger an Wasser und an einem Wasser-Glykol-Gemisch durchgeführten Messungen ($p/d = 1,25 - 1,60$) ist abgeschlossen.

Der Vergleich mit den in der vorliegenden Arbeit berechneten Nusselt-Zahlen ergibt eine gute Übereinstimmung, und zwar sowohl in Bezug auf den Einfluss der Prandtl- und der Reynolds-Zahl als auch auf jenen des Teilungsverhältnisses. Der Aufbau der in Gleichung (45) enthaltenen Funktion $f(Pr^+)$ in der Form $f(Pr) = B(Pr - A)Pr^n$ hat sich auch bei der Auswertung der experimentell gewonnenen Daten bewährt.

Die von Rieger ermittelte Beziehung zur Berechnung der Nusselt-Zahl lautet:

$$Nu = \frac{RePr\zeta/8}{1 + 8,8(Pr - 1,3)Pr^{-0,22}\sqrt{(\zeta/8)}} \quad (89)$$

Dieser Formel liegen die durch die Gleichungen (47) und (88a) festgelegten Widerstandsbeiwerte ζ zugrunde. In Abb. 26 sind die für die beiden Teilungsverhältnisse $p/d = 1,25$ und $p/d = 1,60$ gemessenen Nusselt-Zahlen in der Form $Nu/Pr^{0,4}$ über der Reynolds-Zahl aufgetragen. Die Prandtl-Zahlen variierten im Experiment

zwischen $Pr = 2,5$ und $Pr = 17,5$. Zum Vergleich wurden daher die für $Pr = 10$ berechneten Nusselt-Zahlen Nu_D eingezeichnet. Denselben Verlauf erhält man mit Hilfe der Gleichung (52) mit ζ aus den Gleichungen (47) und (88a) und mit $Pr^+ = Pr(\epsilon_n/\epsilon_m)_{Nu}$ aus Gleichung (50). Auch die nach Gleichung (89) berechnete Kurve deckt sich nahezu mit der eingezeichneten Kurve Nu_D . Wie aus diesem Vergleich zu ersehen ist, führen selbst bei dieser komplexen Geometrie die eingeführten Vereinfachungen und Annahmen zu sehr guten Resultaten für den Wärmeübergang.

LITERATURVERZEICHNIS

1. W. B. HALL and P. H. PRICE, The effect of a longitudinally varying wall heat flux on the heat transfer coefficient for turbulent flow, *Int. Dev. Heat Transfer* **72**, 607–613 (1961).
2. D. B. SPALDING, Heat transfer to a turbulent stream from a surface with a stepwise discontinuity in wall temperature, *Int. Dev. Heat Transfer* **439–446** (1961).
3. A. G. SMITH and V. L. SHAH, The calculation of wall and fluid temperatures for the incompressible turbulent boundary layer with arbitrary distribution of wall heat flux, *Int. J. Heat Mass Transfer* **5**, 1179–1189 (1962).
4. E. M. SPARROW and S. H. LIN, Boundary layers with prescribed heat flux, application to simultaneous convection and radiation, *Int. J. Heat Mass Transfer* **8**, 437–448 (1965).
5. W. TOLLE, Grenzschichttheoretische Untersuchungen zum Problem des Wärmeaustausches bei Gleichstrom und Gegenstrom, Dissertation an der Technischen Hochschule Karlsruhe (1964).
6. H. REICHARDT, Die Grundlagen des turbulenten Wärmeübergangs, *Arch. ges. Wärmetech.* **2**, 129–142 (1951).
7. H. REICHARDT, Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Rohren, *Z. Angew. Math. Mech.* **31**, 208–219 (1951).
8. R. R. ROTFUS, J. E. WALKER and G. A. WHAN, Correlation of local velocities in tubes, annuli and parallel plates, *A.I.Ch.E. Jl* **4**, 240–244 (1958).
9. R. V. BAILEY, Heat transfer to liquid metals in concentric annuli, U.S. Atomic Energy Commission Report, ORNL-521 (1950).
10. J. A. BRIGHTON and J. B. JONES, Fully developed turbulent flow in annuli, *J. Bas. Engng* **86**, 835–844 (1964).
11. R. N. LYON, Liquid metal heat-transfer coefficients, *Chem. Engng Proc.* **47**, 75–79 (1951).
12. U. GRIGULL and H. TRATZ, Thermischer Einlauf in ausgebildeter laminarer Rohrströmung, *Int. J. Heat Mass Transfer* **8**, 669–678 (1965).
13. R. E. JOHNK and T. J. HANRATTY, Temperature profiles for turbulent flow of air in a pipe, *Chem. Engng Sci.* **17**, 867–892 (1962).

14. R. G. DESSLER and C. S. EIAN, Analytical and experimental investigation of fully developed turbulent flow of air in a smooth tube with heat transfer with variable fluid properties, NACA TN 2629 (1952).
15. R. G. DESSLER, Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer, and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt numbers, TR 1210, 1955, and J. P. HARTNETT, *Recent Advances in Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, New York (1961).
16. W. L. FRIEND and A. B. METZNER, Turbulent heat transfer inside tubes and the analogy among heat, mass and momentum transfer. *A.I.Ch.E. JI* 4, 393-402 (1958).
17. P. L. KIRILOV, V. I. SUBBOTIN, M. YA. SUVOROV and M. F. TROYANOV, The investigation of heat transfer to a sodium-potassium alloy in a tube, *Soviet J. Atom. Energy* 6, 253-260 (1959).
18. W. HUFSCHMIDT, E. BURCK und W. RIEBOLD, Die Bestimmung örtlicher und mittlerer Wärmeübergangszahlen in Rohren bei hohen Wärmestromdichten, *Int. J. Heat Mass Transfer* 9, 539-565 (1966).
19. S. LEVY, Heat-conduction methods in forced-convection flow, *Trans. ASME* 78, 1627 (1956).
20. J. P. HARTNETT, Experimental determination of the thermal entrance length for the flow of water and oil in circular pipes, *Trans. ASME* 77, 1211-1220 (1955).
21. V. J. BERRY, Non-uniform heat transfer to fluids flowing in conduits, *Appl. Sci. Res.* 4A, 61-75 (1953).
22. L. M. K. BOELTER, D. YOUNG and H. W. IVERSEN, An investigation of aircraft heaters—XXVII. Distribution of heat transfer rate in the entrance section of a circular tube, NACA TN 1451 (1948).
23. J. L. NOVOTNY, S. T. MCCOMAS, E. M. SPARROW and E. R. G. ECKERT, Heat transfer in rectangular ducts with two heated and two unheated walls, Minnesota University, Minneapolis, Heat Transfer Lab., Contract AT (11-1)-659 (1965).
24. E. BRUNDRETT and P. R. BURROUGHS, The temperature inner-law and heat transfer for turbulent air flow in a vertical square duct, *Int. J. Heat Mass Transfer* 10, 1133-1142 (1967).
25. L. M. TREFFETHEN and L. MCGREGOR, Heat transfer properties of liquid metals, NP 1788, Tech. Info. Service, United States Atomic Energy Comm. (1950).
26. E. M. SPARROW, J. R. LLOYD and C. W. HIXON, Experiments on heat transfer in an asymmetrically heated rectangular duct, *Trans. ASME* 88, 170-174 (1966).
27. O. E. DWYER, On the transfer of heat to fluids flowing through pipes, annuli and parallel plates, *Nucl. Sci. Engng* 17, 336-344, (1963).
28. O. E. DWYER, Equations for bilateral heat transfer to a fluid flowing in a concentric annulus, *Nucl. Sci. Engng* 15, 52-57 (1963).
29. O. E. DWYER, Bilateral heat transfer in annuli for slug and laminar flows, *Nucl. Sci. Engng* 19, 48-57 (1964).
30. W. M. KAYS and E. Y. LEUNG, Heat transfer in annular passages—hydrodynamically developed turbulent flow with arbitrarily prescribed heat flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* 6, 537-557 (1963).
31. A. ROBERTS, A comment on the turbulent flow velocity profile in a concentric annulus, *Int. J. Heat Mass Transfer* 10, 709-712 (1967).
32. R. R. ROTHFUS, C. C. MONRAD and V. E. SENEAL, Velocity distribution and fluid friction in smooth concentric annuli, *Ind. Engng Chem.* 42, 2511-2520 (1950).
33. K. H. PRESSER, G. PIETRALA and R. HARTH, Wärmeübergang und Druckverlust an innenbeheizten Ringspalten bei Hochdruck-Gaskühlung, *Chemie-Ingr.-Tech.* 38, 180-181 (1966).
34. O. WALGER, Wärmeübergang in ringförmigen Strömungsquerschnitten, *Chemie-Ingr.-Tech.* 25, 474-476 (1953).
35. R. L. JUDD and J. H. T. WADE, Forced convection heat transfer in eccentric annular passages, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, 272-288 (1963).
36. W. EIFLER and R. NÜSING, Experimental investigation of velocity distribution and flow resistance in a triangular array of parallel rods, *Nucl. Engng Des.* 5, 22-42 (1967).
37. E. V. FIRSOVA, Study of heat transfer and flow resistance of water flowing parallel to a bundle of rods, *Inzh.-Fiz. Zh.* 4, 17-22 (1963).
38. M. RIEGER, Etude expérimentale du transfert de chaleur dans des faisceaux tubulaires en écoulement parallèle pour une densité de flux thermique constante dans le domaine des nombres de Prandtl moyens, Thèse de Docteur-Ingénieur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1968.—Gekürzte deutsche Fassung: Experimentelle Untersuchung des Wärmeübergangs in parallel durchströmten Rohrbündeln bei konstanter Wärmestromdichte im Bereich mittlerer Prandtl-Zahlen, *Int. J. Heat Mass Transfer* 12, 1421-1447 (1969).
39. H. GRÄBER, Der Wärmeübergang bei der laminar längs angeströmten ebenen Platte mit der Wärmeflussverteilung $q_w \sim x^m$, *Int. J. Heat Mass Transfer* 12, 1605-1620 (1969).
40. S. HASEGAWA and Y. FUJITA, Turbulent heat transfer in a tube with prescribed heat flux, *Int. J. Heat Mass Transfer* 11, 943-962 (1968).
41. W. EIFLER, Berechnung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung und der Wandreibung in konzentrischen Ringspalten, *Wärme u. Stoffübert.* 2, 36-46 (1969).

HEAT TRANSFER IN SMOOTH TUBES, BETWEEN PARALLEL PLATES, IN ANNULI
AND TUBE BUNDLES WITH EXPONENTIAL HEAT FLUX DISTRIBUTIONS IN
FORCED LAMINAR OR TURBULENT FLOW

Abstract—By introducing an additional parameter F_0 , the processes known hitherto for calculating heat transfer are extended to the heat flux distributions which give a heat-transfer coefficient independent of position downstream of the thermal and hydraulic stabilisation regions. This condition is satisfied for

laminar and turbulent flow with a linear pressure drop when the heat flux distribution follows an exponential law $q_w = \exp(mx)$, as with heat exchangers. The influence of the exponent m on the heat transfer is described by the differential quotient $d\vartheta_w/d\vartheta_0 = F_0$, defined by the temperature gradients $d\vartheta_w/dx$ along the wall transmitting the heat and $d\vartheta_0/dx$ in the fluid at the point where the temperature gradient normal to the wall reduces to zero. For the annular space, the equations for explicit calculation of the temperature field will be given, as well as the Nusselt number in laminar flow and constant heat flux, the heat transfer taking place on one wall or both. In turbulent flow, the laws of distribution of eddy diffusivity for momentum in a tube, established by H. Reichardt, adapted for the annular space and the tube bundle, give the velocity field and the coefficient of friction and thus permit solution of the heat transfer equations. The results of the numerical calculation carried out with an IBM-7094 computer are given in the tables and diagrams for an extended range of the various parameters and compared with the experimental results: distribution of velocity, temperature and heat flux density normal to the wall, Nusselt number and mean temperature.

A simple process to determine the lower limit of the thermal entry length will be described.

**TRANSFERT DE CHALEUR DANS DES TUBES LISSES ENTRE DES PLANS
PARALLÈLES, DANS DES ESPACES ANNULAIRES ET DANS DES FAISCEAUX
DE TUBES, AVEC DES DISTRIBUTIONS EXPONENTIELLES DE FLUX THERMIQUE
POUR UN ÉCOULEMENT FORCÉ LAMINAIRE OU TURBULENT**

Résumé—Par l'introduction d'un paramètre supplémentaire F_0 , les procédés connus jusqu'à présent pour le calcul du transfert de chaleur sont étendus aux répartitions du flux de chaleur qui, en aval de l'établissement du régime thermique et hydrodynamique, indiquent un coefficient de transfert de chaleur indépendant de l'endroit. Cette condition est remplie pour l'écoulement laminaire ou turbulent avec chute de pression linéaire quand la répartition du flux de chaleur suit une loi exponentielle $q_w = \exp(mx)$, comme c'est le cas pour les échangeurs de chaleur. L'influence de l'exposant m sur la transmission de chaleur est décrite par le quotient différentiel $d\vartheta_w/d\vartheta_0 = F_0$, défini par les gradients de température $d\vartheta_w/dx$ le long de la paroi transmettant la chaleur et $d\vartheta_0/dx$ dans le fluide à l'endroit où le gradient de température normal à la paroi s'annule. Pour l'espace annulaire, seront indiquées les équations pour le calcul explicite du champ de température ainsi que le nombre de Nusselt en écoulement laminaire et flux de chaleur constant, l'échange de chaleur s'effectuant sur une seule paroi ou sur les deux. En écoulement turbulent, les lois concernant la répartition de la diffusivité de quantité de mouvement dans un tube, établies par H. Reichardt et adaptées à l'espace annulaire et au faisceau tubulaire, permettent la détermination du champ de vitesse et du coefficient de perte de charge et conséquemment la solution des équations de transfert de chaleur. Les résultats du calcul numérique sont rassemblés dans des tableaux et représentés par des diagrammes pour un domaine étendu des différents paramètres et comparés avec des résultats expérimentaux: répartition de la vitesse, de la température et de la densité du flux de chaleur normal à la paroi, nombre de Nusselt, température de mélange. Par un procédé simple, on peut déterminer la valeur minimale de la longueur d'établissement du régime thermique.

**ТЕПЛООБМЕН В КАНАЛАХ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГЛАДКИМИ
ПЛАСТИНКАМИ, В КОЛЬЦЕВЫХ ЗАЗОРАХ И ТРУБАХ С
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ПРИ
ВЫНУЖДЕННОМ ЛАМИНАРНОМ ИЛИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ**

Аннотация—Введением дополнительного параметра F_0 методика, применявшаяся до сих пор для расчета теплообмена, распространяется на распределение теплового потока, в результате чего получается коэффициент теплообмена, независимый от положения участков тепловой и гидравлической стабилизации вниз по потоку. Это условие реализуется для ламинарного и турбулентного течений при линейном изменении давления, когда распределение теплового потока подчиняется экспоненциальному закону $q_w = \exp(mx)$, как в случаях теплообменников. Влияние показателя m на теплообмен описывается производной $d\vartheta_w/d\vartheta_0 = F_0$, определяемой температурными градиентами $d\vartheta_w/dx$ вдоль поверхности нагрева и $d\vartheta_0/dx$ в жидкости в точке, где температурный градиент, перпендикулярный к стенке, стремится к нулю. Для кольцевых зазоров приводятся решения в явном виде для поля температур, а также для числа Нуссельта в ламинарном течении и постоянном тепловом потоке при теплообмене как на одной стенке, так и на обеих. Для турбулентного течения с помощью законов распределения коэффициентов вихревой диффузии для количества движения в трубе, установленных Х. Райхардтом, модифицированных для кольцевого зазора и пучка труб, определяется поле скорости и коэффициент трения, что позволило решить

уравнение теплообмена. Результаты численного решения, проведенного на машине IBM-7094, приводятся в виде таблиц и графиков для широкого диапазона различных параметров. Распределение скорости, температуры и плотности теплового потока, перпендикулярного к стенке, числа Нуссельта и средней температуры сравниваются с экспериментальными данными. Описывается простая методика для определения нижнего предела длины участка тепловой стабилизации.